

Санкт-Петербургский государственный университет

**ЗИНАТУЛЛИН Эдуард Рустемович**

**Выпускная квалификационная работа**

**ХРАНЕНИЕ КВАДРАТУРНО-СЖАТОГО СВЕТА В  
ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННОМ ТЕПЛОВОМ АНСАМБЛЕ  
АТОМОВ**

Уровень образования: магистратура

Направление 03.04.02 «Физика»

Основная образовательная программа ВМ.5511.2018 «Физика»

Научный руководитель:

профессор, Кафедра общей физики-I,  
д.ф.-м.н., профессор, Голубев Ю.М.

Рецензент:

доцент, Санкт-Петербургский поли-  
технический университет Петра  
Великого, к.ф.-м.н., Курашцев А.С.

Санкт-Петербург

2020

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Обзор литературы</b>	<b>6</b>
1.1 Протоколы квантовой памяти . . . . .	6
1.1.1 Электромагнитная индуцированная прозрачность . . . . .	6
1.1.2 Адиабатическая и быстрая квантовые памяти . . . . .	7
1.1.3 Рамановская память . . . . .	7
1.2 Критерии работы квантовой памяти . . . . .	7
1.2.1 Эффективность и верность . . . . .	7
1.2.2 Время хранения . . . . .	8
1.2.3 Многомодовость и полоса пропускания . . . . .	8
1.3 Источники широкополосного сжатого света . . . . .	9
1.3.1 Вырожденный параметрический генератор света в надпороговом режиме . . . . .	9
1.3.2 Одномодовый субпуассоновский лазер с захватом фазы . . . . .	9
1.4 Квантовая память на тепловых атомных ансамблях . . . . .	10
<b>2 Модель памяти</b>	<b>11</b>
2.1 Быстрая резонансная квантовая память . . . . .	11
2.2 Решение системы уравнений Гейзенберга для этапов записи и считывания .	13
2.3 Собственные функции ядра памяти и функции отклика среды . . . . .	15
2.4 Учет теплового движения атомов на этапе хранения . . . . .	17
2.4.1 Учет продольного движения атомов . . . . .	17
2.4.2 Учет поперечного движения атомов . . . . .	19
2.5 Влияние дифракции в отсутствии теплового движения атомов . . . . .	20
2.6 Влияние дифракции при наличии теплового движения . . . . .	21
<b>3 Сохранение квадратурно-сжатого света</b>	<b>23</b>
3.1 Одномодовый режим работы памяти . . . . .	23
3.2 Пути оптимизации одномодового режима . . . . .	27
3.2.1 Моды памяти с учетом теплового движения . . . . .	28
3.2.2 Моды памяти с учетом дифракции . . . . .	29

3.3	Сохранение широкополосного сжатого света . . . . .	30
3.3.1	Субпуассоновский лазер с захватом фазы . . . . .	30
3.3.2	Сохранение импульса от СПЛ . . . . .	31
	<b>Заключение</b>	<b>36</b>
	<b>Литература</b>	<b>37</b>

# Введение

Наиболее перспективными носителями информации в квантовой оптике и квантовой теории информации являются световые импульсы. Они обладают большим количеством квантовых степеней свободы (частота, поляризация, орбитальный угловой момент и др.), и благодаря этому на их основе можно легко реализовать несколько каналов связи. Кроме того, световые импульсы распространяются с максимально возможной скоростью и их сравнительно просто генерировать. Однако они обладают и своими недостатками, одним из главных недостатков является сложность их хранения.

При передаче импульсами света классической информации для их хранения используют волоконно-оптические линии задержки и оптические резонаторы. Однако, при передаче квантовой информации из-за несовершенства приборов и процесса декогеренции, вызванного взаимодействием с окружающей средой, время их хранения оказывается существенно ограниченным. Поэтому для передачи и хранения квантовой информации светового сигнала используется квантовая память. В ее основе лежит принцип переноса квантово-статистических свойств света на “долгоживущие” степени свободы другой физической системы. В качестве такой системы чаще всего выступает ансамбль атомов.

Квантовая память является неотъемлемым элементом многих разрабатываемых информационных и телекоммуникационных приложений. Например, она может использоваться при создании детерминированных источников одиночных фотонов, широко используемых в задачах квантовой криптографии. Другое важное приложение квантовой памяти – создание квантовых повторителей, позволяющих решить проблему передачи квантовой информации на большие расстояния.

При построении теоретических моделей квантовой памяти обычно используется приближение холодных атомов. В этом приближении все атомы ансамбля, с которыми взаимодействуют световые импульсы, считаются неподвижными или их движением можно пренебречь. Это позволяет существенно упростить математическое описание происходящих физических процессов. Но на практике получение ансамбля холодных атомов сопряжено со значительными трудностями, и поэтому при экспериментальной реализации протоколов квантовой памяти широко применяются тепловые атомные ансамбли. Однако, влияние теплового движения атомов может оказаться губительным для информации, записанной в такую ячейку.

В нашей работе мы рассмотрим протокол многомодовой быстрой резонансной квантовой памяти, основанный на резонансном взаимодействии коротких импульсов сиг-

нального и управляющего полей с тепловым атомным ансамблем. В рамках этого протокола мы можем пренебречь смещением атомов на временах записи и считывания и учитывать его только на этапе хранения. Мы решим трехмерную задачу и построим математическое описание этого протокола, учитывающее тепловое движение атомов не только в продольном, но и поперечном направлениях. Кроме того, учтем наличие дифракции света в атомной среде и рассмотрим случай прямого и обратного считывания, для которых дифракция проявляется по-разному.

Затем мы найдем моды Шмидта для неподвижного ансамбля атомов без учета дифракции и проанализируем как в нашей модели сохраняются отдельные сжатые моды при различных параметрах ячейки памяти. Также найдем собственные моды, учитывающие наличие продольного теплового движения, и моды, учитывающие наличие дифракции. С их помощью мы оптимизируем одномодовый режим. И далее проанализируем способность исследуемого протокола к сохранению широкополосных импульсов света от субпуассоновского лазера с захватом фазы при различных параметрах ячейки и оценим влияние теплового движения и дифракции на корреляционные свойства записанного внутрь ячейки памяти квадратурно-сжатого света.

# Глава 1

## Обзор литературы

### 1.1 Протоколы квантовой памяти

На данный момент существует достаточно много протоколов квантовой памяти, в основе которых лежат различные механизмы взаимодействия света с веществом. Чаще всего в качестве такого вещества, на квантовые степени свободы которого будет переноситься статистика импульса сигнального поля, при создании ячейки памяти используются ансамбли атомов. Рассмотрим кратко некоторые из основных протоколов квантовой памяти.

#### 1.1.1 Электромагнитная индуцированная прозрачность

Один из самых первых и наиболее изученных протоколов – это модель квантовой памяти, основанная на эффекте электромагнитной индуцированной прозрачности (ЕИТ) [1, 2]. Она реализуется благодаря стационарному взаимодействию сигнального и управляющего полей с ансамблем атомов, имеющих  $\Lambda$ -конфигурацию энергетических уровней. При этом опорное поле, действующее на одном из переходов, просветляет среду для сигнального поля, действующего на другом переходе. Такая прозрачность сопровождается существенным уменьшением групповой скорости сигнального импульса и его сжатием в среде. Когда импульс целиком помещается в среде, интенсивность опорного поля уменьшают и групповая скорость импульса становится равной нулю, таким образом сигнальный импульс записывается в среду. При считывании сигнала опорное поле снова включают, импульс света продолжает свое распространение и покидает среду. И хотя протокол памяти на ЕИТ является одной из первых моделей, его изучением продолжают заниматься до сих пор [3]. Однако, большая длительность импульса сигнального поля существенно ограничивает ширину его частотного спектра и, как следствие, ограничивает пропускную способность квантового канала, содержащего такую ячейку памяти.

### 1.1.2 Адиабатическая и быстрая квантовые памяти

Более перспективными для использования в информационных приложениях оказываются многомодовые модели квантовой памяти. Так, на ансамбле атомов с  $\Lambda$ -конфигурацией энергетических уровней может быть реализован протокол адиабатической квантовой памяти [4, 5]. В рамках этого протокола длительность импульса предполагается много меньше величины  $d\gamma^{-1}$ , где  $\gamma^{-1}$  – время жизни возбужденного состояния, а  $d$  – оптическая толщина, но гораздо меньше времени установления в среде электромагнитной индуцированной прозрачности. Благодаря этому удастся адиабатически исключить из рассмотрения возбужденное состояние среды, а ограничение на спектральную ширину сигнального поля частично снимается.

Другой моделью памяти, реализующейся на таком же типе атомов, является протокол быстрой резонансной квантовой памяти, в которой длительности импульсов много меньше времени жизни возбужденного состояния. Основные достоинства этого протокола памяти – большая широкополосность и малые длительности процессов взаимодействия световых импульсов со средой, что важно для схем квантовых вычислений. Мы не будем сейчас подробно останавливаться на этом протоколе, так как именно его исследованию посвящена данная работа.

### 1.1.3 Рамановская память

Квантовая память, основанная на эффекте рамановского рассеяния [6, 7, 8] (комбинационное рассеяние) – еще один протокол, реализуемый на ансамбле атомов с  $\Lambda$ -конфигурацией энергетических уровней. В отличие от рассмотренных выше протоколов, сигнальное и управляющее поля оказываются отстроены от частот соответствующих им атомных переходов на величину, много большую скорости распада верхнего уровня. Большая отстройка препятствует реальному заселению верхнего энергетического уровня и вместо этого происходит двухфотонный процесс, порождающий спиновую когерентность, при котором атом поглощает фотон сигнального и фотон управляющего полей.

## 1.2 Критерии работы квантовой памяти

При реализации квантовой памяти всегда остро стоит вопрос о том, насколько хорошо будет работать конкретный протокол. При этом требования на характеристики памяти и оцениваемые критерии зависят от того, какую именно информацию нам необходимо сохранить. Рассмотрим основные критерии, применяемые для оценки эффективности работы квантовой памяти.

### 1.2.1 Эффективность и верность

Одной из основных характеристик работы квантовой памяти является ее эффективность (efficiency). В общем случае эффективность вводится как отношение среднего

числа фотонов, полученных на выходе из ячейки к среднему числу фотонов, поданных на её вход [9]. В работе [10] был найден важный предел на нижнюю границу эффективности протокола квантовой памяти, согласно которому для сохранения квантово-статистических свойств гауссовских состояний света должно выполняться условие  $\eta > 50\%$ .

Другой, не менее важной, характеристикой работы квантовой памяти является верность (fidelity). Эта величина характеризует перекрывание состояния записываемого сигнального поля с состоянием поля на выходе из ячейки памяти. При этом значение верности сильно зависит не только от выбранной модели памяти, условий эксперимента и времени хранения, но и от сложности исходного квантового состояния.

### 1.2.2 Время хранения

Еще одним важным критерием работы квантовой памяти является время хранения. Очевидно, что время хранения должно значительно превышать время записи и считывания из ячейки. В остальном требуемое от памяти время хранения целиком и полностью зависит от её приложений. Так, например, в телекоммуникационных протоколах оно должно быть меньше времени образования корреляции между системами получателя и отправителя, а для квантовых вычислений оно должно быть не меньше времени самих вычислений [11].

Зачастую, при теоретическом анализе протоколов памяти время хранения можно считать бесконечно долгим. Однако на практике время хранения окзывается существенно ограниченным процессами декогеренции, которые могут быть вызваны как внешними, так и внутренними факторами. На данный момент при экспериментальной реализации протоколов квантовой памяти на атомных ансамблях время хранения уже превысило 100 мс [12].

### 1.2.3 Многомодовость и полоса пропускания

Обсуждая квантовую память, нельзя оставить в стороне вопрос, касающийся ее информационной емкости. Информационная емкость ячейки памяти во многом зависит от ее полосы пропускания и количества собственных мод среды, на которые мы можем переносить квантово-статистические свойства излучения.

На сегодняшний день большинство работ посвящено одномодовым моделям памяти. Однако, активно ведутся работы по разработке эффективных многомодовых протоколов, способных обеспечивать пространственную и временную мультипликативность, тем самым увеличив пропускную способность информационного канала за счет дополнительных квантовых степеней свободы [13]. Кроме того, используемый в квантовых протоколах свет изначально может обладать некоторым количеством независимых мод, обладающих уникальной квантовой статистикой.

Полоса пропускания определяет спектрально-частотные границы применения того или иного протокола квантовой памяти, и для эффективной передачи и хранения ин-



формации эти границы должны совпадать с соответствующим спектрально-частотным диапазоном излучения, которое мы хотим с его помощью сохранить. Также, чем богаче спектральный диапазон квантового канала, включающего ячейку памяти, тем выше его пропускная способность. Таким образом, полоса пропускания является одним из важнейших параметров для практического применения протоколов квантовой памяти.

### **1.3 Источники широкополосного сжатого света**

Одним из наиболее интересных состояний света, с точки зрения квантовой оптики, является квадратурно-сжатый свет, для которого флуктуации одной из квадратур оказываются меньше стандартного квантового предела за счет увеличения флуктуаций другой квадратуры, при этом не нарушается принцип неопределенности Гейзенберга. Такое квантовое состояние света служит важным ресурсом во многих ее приложениях. Так, например, на его основе могут быть построены кластерные состояния, используемые для реализации протоколов однонаправленных квантовых вычислений.

#### **1.3.1 Вырожденный параметрический генератор света в надпороговом режиме**

Одним из источников широкополосного квадратурно-сжатого света является вырожденный параметрический генератор света (ВПГС) [14, 15]. Он представляет собой высокодобротный оптический резонатор, внутри которого находится нелинейный кристалл. Под действием внешнего классического поля накачки происходит генерация сигнального и холостого квантовых полей. Нелинейный кристалл параметрически преобразует один фотон накачки в фотон сигнального поля и фотон холостого поля, и наоборот. В вырожденном режиме генерации частоты сигнального и холостого полей равны друг другу. При этом генерация на частоте сигнального поля возникает при интенсивности поля накачки, превышающей некоторое пороговое значение. Для генерируемого таким образом сигнального поля фазовая квадратура поля будет сжата, а амплитудная – растянута. Предсказанные теоретически квантовые особенности излучения ВПГС в надпороговом режиме находят подтверждение в экспериментальных работах [16].

#### **1.3.2 Одномодовый субпуассоновский лазер с захватом фазы**

Другим не менее интересным источником широкополосного яркого квадратурно-сжатого света является субпуассоновский лазер (СПЛ) с захватом фазы. Впервые теоретическая работа, посвященная СПЛ [17], была опубликована в 1984 году, а спустя два года такой лазер получил экспериментальную реализацию [18]. Тем не менее, СПЛ не получили широкого распространения в квантовой оптике из-за эффекта диффузии фазы, характерного для данного типа источников, который делал невозможным наблюдение

квадратурного сжатия. Ситуация кардинально изменилась, когда удалось подавить фазовую диффузию (захватить фазу) за счет использования внешнего синхронизирующего излучения [19]. В статьях [20, 21] авторами подробно исследованы свойства излучения от СПЛ с захватом фазы.

В настоящей работе именно СПЛ с захватом фазы будет рассмотрен в качестве источника сжатого света.

## 1.4 Квантовая память на тепловых атомных ансамблях

Квантовая память на медленно движущихся атомных ансамблях реализуется на атомах, предварительно охлажденных в магнито-оптической ловушке [22]. При этом температура охлаждения атомов перед началом записи значительно превышает температуру вырождения, и можно считать, что движение описывается статистикой Максвелла-Больцмана. Перед началом записи магнито-оптическая ловушка отключается, и ничто не препятствует свободному разлету атомов. Кроме того, ансамбль атомов достаточно разряжен, и взаимодействием атомов друг с другом можно пренебречь. Подобную ситуацию можно встретить, например, в работах [23, 24], где авторы экспериментально исследовали квантовую память на охлажденных парах цезия при температуре  $\sim 100 \mu\text{K}$

При таких условиях можно пренебречь тепловым движением атомов на этапах записи и считывания и учитывать его только на этапе хранения. Таким образом, распределение когерентности, образовавшееся в среде при записи, окажется размыто тепловым движением за время хранения.

# Глава 2

## Модель памяти

### 2.1 Быстрая резонансная квантовая память

Как уже говорилось ранее, мы будем исследовать протокол быстрой резонансной квантовой памяти. В его основе лежит взаимодействие сигнального  $\hat{E}_s$  и управляющего  $E_d$  импульсов световых полей с ансамблем атомов, имеющих  $\Lambda$ -конфигурацию энергетических уровней. Эти импульсы распространяются совместно вдоль оси  $z$ . При этом сигнальное поле, несущее в себе информацию, является квантовым, а управляющее – классическим. Атомный ансамбль для простоты мы будем считать плоским слоем толщины  $L$ , равномерно заполненным атомами и расположенным перпендикулярно оси распространения импульсов света. Для удобства расчетов мы будем считать слой бесконечным, так как поперечные размеры сигнального импульса много меньше поперечных размеров ансамбля.

Полный цикл памяти, схема которого представлена на Рис. 2.1, включает в себя три этапа: запись, хранение, и считывание; длительности этих этапов  $T_w$ ,  $T_s$  и  $T_r$ , соответственно. В рамках протокола быстрой памяти для времен этапов должно выполняться условие  $T_w, T_r \ll \gamma^{-1} \ll T_s$ , где  $\gamma^{-1}$  – время спонтанного распада с уровня  $|3\rangle$  на уровень  $|1\rangle$ . Время релаксации с уровня  $|3\rangle$  на уровень  $|2\rangle$  мы выберем много больше, чем  $\gamma^{-1}$  и  $T_s$ , и не будем учитывать спонтанный распад между этими уровнями. Сразу отметим, что процессы взаимодействия световых полей с атомами являются короткими, и мы можем не рассматривать тепловое движение на этапах записи и считывания, считая что атомы не успевают существенно сместиться за эти времена.

На этапе записи оба импульса одновременно подаются на вход ячейки памяти. При этом в двухфотонном процессе слабое сигнальное поле переводит часть атомов ансамбля, приготовленного с помощью оптической накачки в основном состоянии  $|1\rangle$ , в возбужденное состояние  $|3\rangle$ , а сильное управляющее поле переносит эти атомы из состояния  $|3\rangle$  в основное состояние  $|2\rangle$ . В результате образуется долгоживущая спиновая когерентность между уровнями  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ , на которую “отпечатываются” квантово-статистические свойства сигнального поля.

За длительное время хранения происходит “размытие” образовавшейся на этапе записи когерентности, вызванное тепловым движением атомов ансамбля. При этом ато-

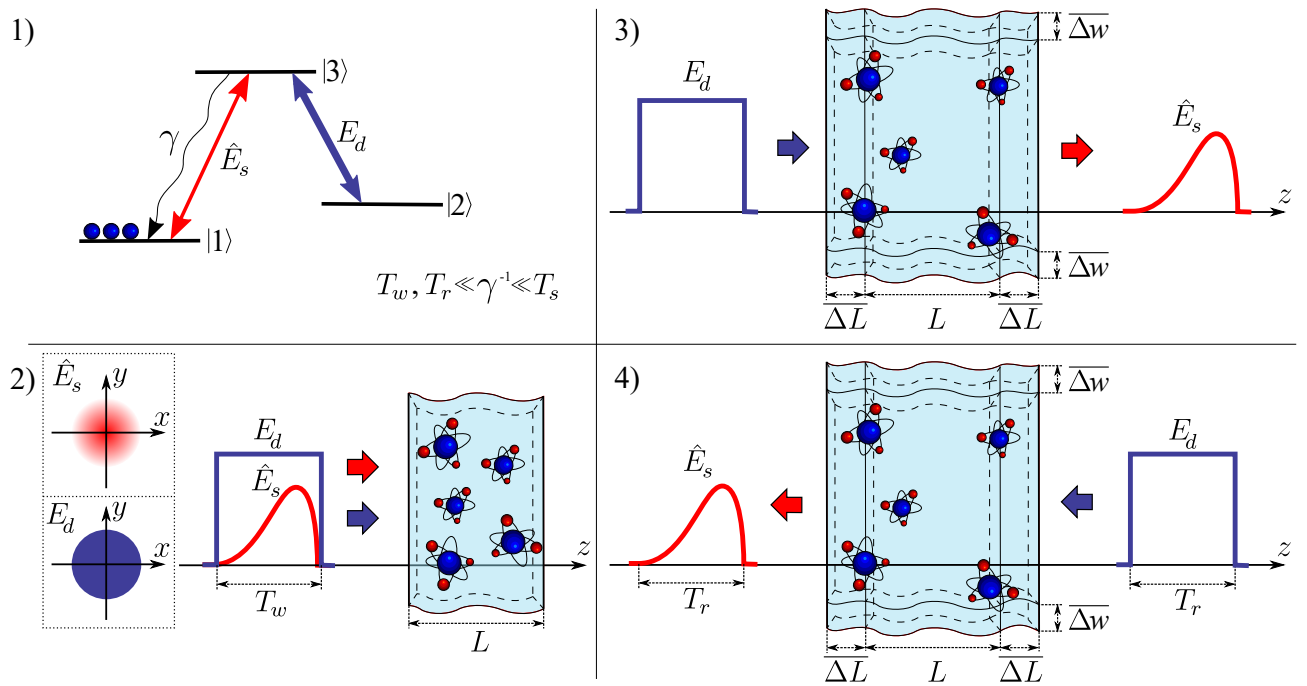


Рис. 2.1: Схематичное изображение цикла памяти: 1) схема энергетических уровней атома с действующими сигнальным  $\hat{E}_s$  и управляющим  $E_d$  полями, 2) запись, 3) прямое считывание, 4) обратное считывание. На вставке поперечный профиль полей: управляющее поле – плоская волна; сигнальное поле – гауссов пучок.

мы, которые остались в состоянии  $|3\rangle$  на момент окончания этапа записи, в результате спонтанного распада переходят на уровень  $|1\rangle$ .

Считывание сигнального импульса может производиться двумя различными способами: при прямом считывании импульс управляющего поля подается на тот же вход ячейки памяти что и при записи; а при обратном считывании импульс подается на противоположный вход ячейки памяти. В обоих случаях при взаимодействии с импульсом сильного управляющего поля атомы из состояния  $|2\rangle$  переходят в состояние  $|1\rangle$  через возбужденное состояние  $|3\rangle$ , и происходит восстановление сигнального поля, которое несет в себе квантово-статистические свойства входного сигнала. Но характеристика памяти для прямого и обратного считывания и особенность протекающих процессов сильно отличаются. Так, в работе [25] было показано, что обратное считывание гораздо эффективнее прямого. Однако, как мы увидим далее, при обратном считывании из-за эффекта дифракции возникает перемешивание квадратур между разными модами, что может привести к разрушению квантового состояния записанного импульса. Поэтому в нашей работе будут рассмотрены оба варианта считывания.

## 2.2 Решение системы уравнений Гейзенберга для этапов записи и считывания

Теперь перейдем к математическому описанию физических процессов, протекающих в ячейке памяти на этапах записи и считывания. Гамильтониан взаимодействия ансамбля атомов с сигнальным и управляющим полями, описывающий процессы записи и считывания, в дипольном приближении имеет вид

$$\hat{V} = - \sum_j \hat{d}_j(t) \hat{E}(\mathbf{r}_j, t), \quad (2.1)$$

$$\hat{E}(\mathbf{r}_j, t) = \hat{E}_s(\mathbf{r}_j, t) + E_d(\mathbf{r}_j, t), \quad (2.2)$$

где  $\hat{d}_j(t)$  – оператор дипольного момента  $j$ -го атома, расположенного в точке  $\mathbf{r}_j$ . Как мы уже упоминали, сигнальное поле является квантовым, а управляющее – классическим. Они задаются выражениями

$$\hat{E}_s(\boldsymbol{\rho}, z, t) = -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_s}{2 \varepsilon_0 c}} \hat{A}(\boldsymbol{\rho}, z, t) e^{i(k_s z - \omega_s t)} + h.c., \quad (2.3)$$

$$E_d(\boldsymbol{\rho}, z, t) = -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_d}{2 \varepsilon_0 c}} \alpha e^{i(k_d z - \omega_d t)} + c.c., \quad (2.4)$$

где  $\alpha$  – амплитуда управляющего поля,  $\omega_s$  и  $\omega_d$  – несущие частоты сигнальной и управляющей волн, соответственно, а  $k_s = \omega_s/c$  и  $k_d = \omega_d/c$  – их волновые числа. Оператор медленной амплитуды сигнального поля  $\hat{A}(\boldsymbol{\rho}, z, t)$  подчиняется коммутационным соотношениям, полученным в статье [26]:

$$[\hat{A}(\boldsymbol{\rho}, z, t), \hat{A}^\dagger(\boldsymbol{\rho}', z', t')] = c \left( 1 - \frac{i}{k_s} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2k_s^2} \Delta_{\boldsymbol{\rho}} \right) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.5)$$

$$[\hat{A}(\boldsymbol{\rho}, z, t), \hat{A}^\dagger(\boldsymbol{\rho}', z, t')] = \delta^2(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \delta(t - t'). \quad (2.6)$$

Для описания взаимодействия атомов с полями будет удобно использовать коллективные операторы, являющиеся суперпозицией микроскопических переменных:

$$\hat{\sigma}_{mn}(\mathbf{r}, t) = e^{ik_d z} \sum_{j=1}^N |m\rangle_j \langle n|_j \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)), \quad (2.7)$$

$$\hat{N}_m(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^N |m\rangle_j \langle m|_j \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)), \quad (2.8)$$

$$[\hat{\sigma}_{mn}(\mathbf{r}, t), \hat{\sigma}_{nm}(\mathbf{r}', t)] = (\hat{N}_m(\mathbf{r}, t) - \hat{N}_n(\mathbf{r}, t)) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.9)$$

Здесь оператор  $\hat{\sigma}_{mn}(\mathbf{r}, t)$  обозначает коллективную когерентность, возникающую в результате дипольных переходов между состояниями  $|m\rangle_j$  и  $|n\rangle_j$ , а оператор  $\hat{N}_m$  – концентрацию атомов на уровне  $|m\rangle_j$ . В введенных нами коллективных переменных гамильтониан взаимодействия (2.1) примет вид

$$\hat{V}(t) = i\hbar \int_V d^3\mathbf{r} \left[ \left( g \hat{A}(\mathbf{r}, t) \hat{\sigma}_{31}(\mathbf{r}, t) + \Omega \hat{\sigma}_{32}(\mathbf{r}, t) \right) - h.c. \right]. \quad (2.10)$$

Сила взаимодействия сигнального и управляющего полей с ансамблем атомов определяется константой связи  $g$  и частотой Раби  $\Omega$ , которые для простоты мы выберем вещественными

$$g = \sqrt{\frac{\omega_s}{2\varepsilon_0\hbar c}} d_{31}, \quad \Omega = \alpha \sqrt{\frac{\omega_d}{2\varepsilon_0\hbar c}} d_{32}. \quad (2.11)$$

где  $d_{31}$  и  $d_{32}$  – матричные элементы оператора дипольного момента, отвечающие соответствующим переходам.

Воспользуемся тем, что процесс взаимодействия сигнального поля с ансамблем атомов является слабым. Как следствие, уровни  $|3\rangle$  и  $|2\rangle$  будут заселены значительно меньше, чем уровень  $|1\rangle$ , и мы можем пренебречь операторами  $\hat{N}_2$  и  $\hat{N}_3$  по сравнению с  $\hat{N}_1$ . Это позволяет нам при выводе уравнений сделать замену оператора  $\hat{N}_1$  на  $c$ -число, т.е.  $\hat{N}_1 \rightarrow N$ , где  $N$  – концентрация атомов в рассматриваемом подансамбле. В связи с этим, нам удобно сделать перенормировку и перейти к новым операторам

$$\hat{B}(\boldsymbol{\rho}, z, t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{\sigma}_{12}(\boldsymbol{\rho}, z, t), \quad \hat{C}(\boldsymbol{\rho}, z, t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{\sigma}_{13}(\boldsymbol{\rho}, z, t), \quad (2.12)$$

для которых будут выполняться стандартные бозонные коммутационные соотношения

$$[\hat{B}(\boldsymbol{\rho}, z, t), \hat{B}^\dagger(\boldsymbol{\rho}', z', t)] = [\hat{C}(\boldsymbol{\rho}, z, t), \hat{C}^\dagger(\boldsymbol{\rho}', z', t)] = \delta^2(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')\delta(z - z'). \quad (2.13)$$

С учетом введенных выше приближений система уравнений Гейзенберга, описывающая эволюцию операторов на протяжении этапов записи и считывания, будет иметь вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - \frac{i}{2\tilde{k}_s} \Delta_{\tilde{\boldsymbol{\rho}}} \right) \hat{A}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \tilde{z}, \tilde{t}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{C}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \tilde{z}, \tilde{t}), \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \hat{B}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \tilde{z}, \tilde{t}) = -\hat{C}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \tilde{z}, \tilde{t}), \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \hat{C}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{A}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \tilde{z}, \tilde{t}) + \hat{B}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \tilde{z}, \tilde{t}). \quad (2.16)$$

В уравнении (2.14) мы пренебрегли развитием волновых фронтов и отбросили производную по времени в левой части уравнения, полагая, что длительности импульсов намного больше времени прохождения света через ячейку памяти. Кроме того, в этой системе мы перешли к безразмерным координатам и времени

$$\tilde{t} = \Omega t, \quad \tilde{z} = \frac{2g^2 N}{\Omega} z, \quad \tilde{\boldsymbol{\rho}} = \frac{2g^2 N}{\Omega} \boldsymbol{\rho}, \quad (2.17)$$

операторы были обезразмерены с помощью соответствующих им коммутационным соотношениям (2.5) и (2.13). В дальнейшем мы будем опускать “тильду” в выкладках, подразумевая безразмерные величины.

В системе уравнений (2.14–2.16) перейдем от операторов к их фурье-образам по поперечной координате, тогда

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k_s} \mathbf{q}^2 \right) \hat{a}(\mathbf{q}, z, t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{c}(\mathbf{q}, z, t), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{b}(\mathbf{q}, z, t) = -\hat{c}(\mathbf{q}, z, t), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{c}(\mathbf{q}, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}(\mathbf{q}, z, t) + \hat{b}(\mathbf{q}, z, t). \quad (2.20)$$

Здесь и в дальнейшем мы будем обозначать строчными буквами фурье-образы от функций, обозначенных соответствующими заглавными буквами. Решая систему уравнений (2.18–2.20), мы находим, как связана амплитуда сигнального поля  $\hat{a}_{in}(\mathbf{q}, t)$  на входе ячейки памяти с когерентностью, образовавшейся к концу этапа записи:

$$\begin{aligned}\hat{b}(\mathbf{q}, z, T_w) &= -e^{-i\frac{q^2}{2k_s}z} \int_0^{T_w} dt G_{ab}(z, t) \hat{a}_{in}(\mathbf{q}, T_w - t) + vac(T_w), \text{ где} \quad (2.21) \\ G_{ab}(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t dt' f_{ab}(z, t') f_{ab}^*(z, t - t'), \\ f_{ab}(z, t) &= e^{-it} J_0(\sqrt{zt}) \Theta_{T_w}(t).\end{aligned}$$

А так же находим связь когерентности  $\hat{b}(\mathbf{q}, z, T_w + T_s)$  на момент окончания этапа хранения с восстановленным полем при прямом считывании

$$\begin{aligned}\hat{a}_{out}^{for}(\mathbf{q}, t) &= - \int_0^L dz e^{-i\frac{q^2}{2k_s}z} G_{ba}(z, t) \hat{b}(\mathbf{q}, L - z, T_w + T_s) + vac(T_r), \text{ где} \quad (2.22) \\ G_{ba}(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t dt' f_{ba}(z, t') f_{ba}^*(z, t - t') \\ f_{ba}(z, t) &= e^{-it} J_0(\sqrt{zt}) \Theta_{T_r}(t).\end{aligned}$$

и с восстановленным полем при обратном считывании

$$\hat{a}_{out}^{back}(\mathbf{q}, t) = - \int_0^L dz e^{-i\frac{q^2}{2k_s}z} G_{ba}(z, t) \hat{b}(\mathbf{q}, z, T_w + T_s) + vac(T_r). \quad (2.23)$$

В этих выражениях  $J_0(\sqrt{zt})$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $\Theta_{T_w}(t)$  и  $\Theta_{T_r}(t)$  – оконные функции, соответствующие временам этапов записи и считывания, а через  $vac(T_w)$  и  $vac(T_r)$  обозначены вклады от всех вакуумных мод рассматриваемой системы. Подробное получение системы уравнений (2.14–2.16) и ее решение можно найти в статьях [25, 27].

## 2.3 Собственные функции ядра памяти и функции отклика среды

Для начала проанализируем цикл памяти без учета теплового движения на этапе хранения и считая, что влиянием дифракции можно пренебречь (т.е. при  $\mathbf{q}^2 L/k_s \ll 1$ ). Тогда, из решений системы уравнений Гейзенберга (2.21), (2.22) и (2.23) с учетом, что  $b(\mathbf{q}, z, T_w + T_s) = b(\mathbf{q}, z, T_w)$  мы получим интегральное преобразование, связывающее поля на входе в ячейку и выходе из неё

$$a_{out}(\mathbf{q}, t) = \int_0^{T_w} dt' G(t, t') a_{in}(\mathbf{q}, T_w - t') + vac. \quad (2.24)$$

Здесь  $G(t, t')$  – вещественное ядро интегрального оператора полного цикла, выражающееся через ядра интегральных операторов записи  $G_{ab}(z, t)$  и считывания  $G_{ba}(z, t)$  для случаев

прямого и обратного считывания как

$$G^{for}(t, t') = \int_0^L dz G_{ba}(z, t) G_{ab}(L - z, t'), \quad G^{back}(t, t') = \int_0^L dz G_{ba}(z, t) G_{ab}(z, t'). \quad (2.25)$$

Возьмем длительности импульсов при записи и считывании равными друг другу:  $T_w = T_r$ . Тогда ядро памяти оказывается симметричным относительно перестановки аргументов, и для него может быть поставлена задача на поиск собственных чисел  $\sqrt{\lambda_i}$  и собственных функций  $\psi_i(t)$ :

$$\sqrt{\lambda_i} \psi_i(t) = \int_0^{T_w} dt' G(t, t') \psi_i(t'). \quad (2.26)$$

Найденные таким образом собственные функции ядра памяти (моды)  $\{\psi_i(z)\}_{i=1}^{\infty}$  образуют полный ортонормированный набор. Как следствие, мы можем использовать для ядра памяти разложение Шмидта

$$G(t, t') = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \psi_i(t) \psi_i(t'). \quad (2.27)$$

При этом, собственные числа  $\lambda_i$  характеризуют эффективность записи соответствующих им мод. Дальнейший анализ памяти мы будем проводить именно на языке собственных функций.

На Рис. 2.2 показаны первые три собственные функции ядра памяти  $G(t, t')$  для случаев прямого и обратного считывания при параметрах памяти  $L = 12$  и  $T_w = 10$ . Такой выбор параметров обусловлен тем, что при них достигаются большие собственные числа первых трех собственных функций для обоих вариантов считывания:  $\lambda_1 = 0.89$ ,  $\lambda_2 = 0.51$  и  $\lambda_3 = 0.16$  для прямого считывания;  $\lambda_1 = 1.00$ ,  $\lambda_2 = 0.99$  и  $\lambda_3 = 0.67$  для обратного. Таким образом, как для прямого, так и для обратного считывания первые две моды памяти будут обладать высокой эффективностью сохранения.

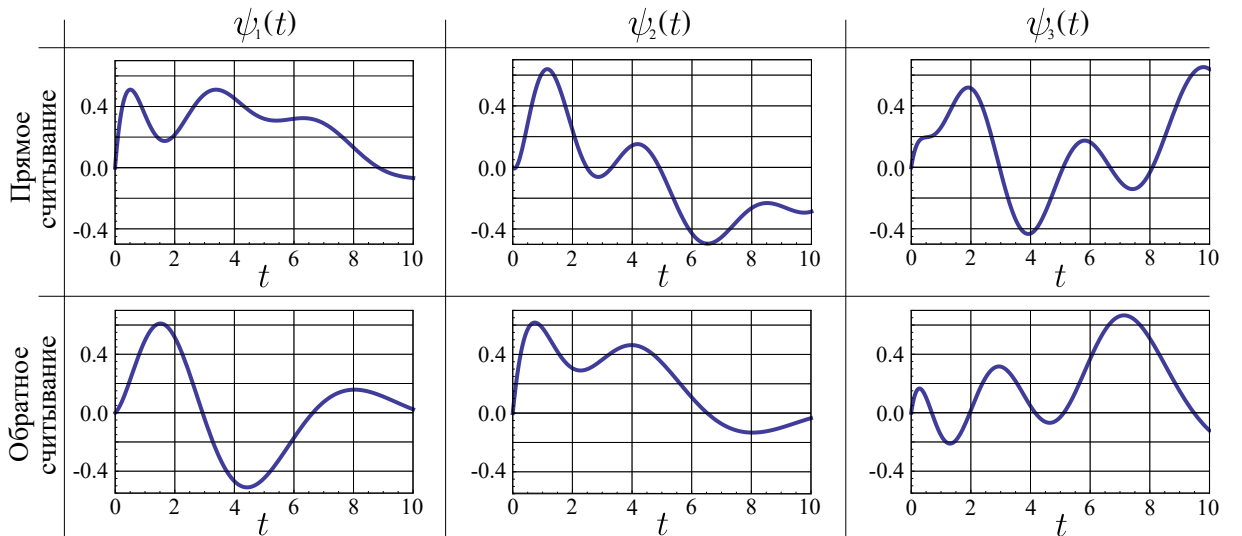


Рис. 2.2: Первые три собственные функции для прямого и обратного считывания.



Теперь введем функции отклика среды  $\{g_i(z)\}_{i=1}^{\infty}$ , представляющие собой когерентности, образующиеся в среде в случае, когда на вход ячейки подается поле с обращенным временным профилем в виде одной из собственных функций

$$\sqrt[4]{\lambda_i} g_i(z) = \int_0^{T_w} dt G_{ab}(z, t) \psi_i(t). \quad (2.28)$$

Функции отклика, соответствующие первым трем собственным функциям для случаев прямого и обратного считывания представлены на Рис. 2.3. Благодаря тому, что функции отклика, так же как и собственные функции, образуют полный ортонормированный набор, мы можем представить ядро полуцикла  $G_{ab}(z, t)$  в виде ряда

$$G_{ab}(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt[4]{\lambda_i} g_i(z) \psi_i(t). \quad (2.29)$$

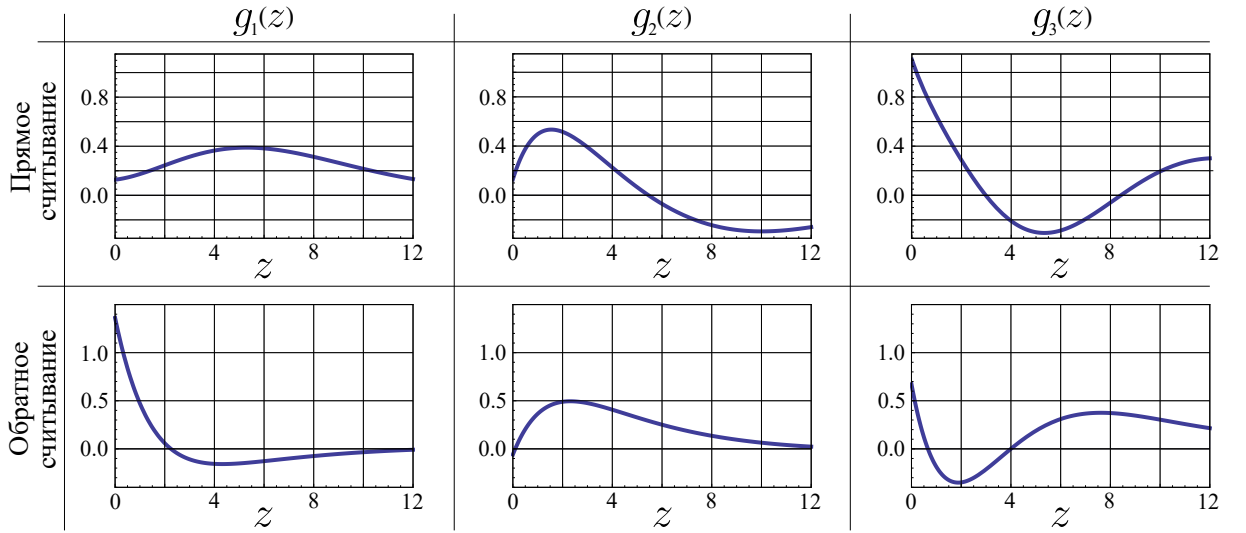


Рис. 2.3: Первые три функции отклика для прямого и обратного считывания.

## 2.4 Учет теплового движения атомов на этапе хранения

### 2.4.1 Учет продольного движения атомов

Рассмотрим случай продольного движения атомов, когда мы уже не можем пренебречь смещением атомов за время этапа хранения. Поведение идеального газа может быть описано статистикой Максвелла-Больцмана в том случае, если его температура превышает температуру вырождения

$$\tau \gg \frac{n^{2/3} h^2}{3mk_b}, \quad (2.30)$$

где  $\tau$  – температура,  $n$  – объемная концентрация,  $m$  – масса одной частицы,  $k_b$  – постоянная Больцмана,  $h$  – постоянная Планка. Распределение атомов по продольным скоростям  $v_z$

будет описываться распределением Максвелла

$$dN_{v_z} = \frac{1}{\sqrt{\pi}u_z} \exp\left(-\frac{v_z^2}{u_z^2}\right) dv_z. \quad (2.31)$$

Здесь  $u_z$  – наиболее вероятная скорость продольного движения, а  $dN_{v_z}$  – число атомов со скоростями принадлежащими промежутку  $(v_z, v_z + dv_z)$ .

Рассмотрим подансамбль атомов, движущийся со скоростью  $v_z$  как единое целое. Для него когерентность на момент окончания этапа хранения будет связана с записанной когерентностью преобразованием сдвига на величину  $v_z T_s$

$$B_{v_z}(\boldsymbol{\rho}, z, T_w + T_s) = B_{v_z}(\boldsymbol{\rho}, z - v_z T_s, T_w). \quad (2.32)$$

Мы можем переписать это выражение для  $i$ -ой функции отклика среды и затем перейти ко всему ансамблю атомов, усреднив вклады от каждого подансамбля с соответствующим статистическим весом. Таким образом, “размытая” функция отклика будет задаваться выражением

$$g_i(z; \overline{\Delta L}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}u_z} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \exp\left(-\frac{v_z^2}{u_z^2}\right) g_i(z - v_z T_s). \quad (2.33)$$

Здесь  $\overline{\Delta L} = T_s u_z$  – среднее смещение атомов в продольном направлении за время хранения в результате теплового движения. Оно характеризует время хранения при заданной температуре атомного ансамбля.

Отметим, что безразмерная координата  $z$  выражается в единицах эффективной оптической длины, которая зависит от концентрации атомов  $n$ . В результате теплового движения концентрация атомов изменяется: изначально она однородна на промежутке  $[0, L]$  и равна нулю вне его, но к концу этапа хранения концентрация становится некоторой функцией  $n(z)$  на промежутке  $z \in (-\infty, +\infty)$ . В связи с этим необходимо переопределить безразмерную координату. Подробное описание того как происходит переопределение координаты изложено в работах [28, 29], и сейчас мы не будем на этом останавливаться. В результате продольного движения оптическая толщина не меняется и после переопределения координаты размытая функция отклика будет лежать на интервале  $[0, L]$ .

Полученные таким образом первые три “размытые” функции отклика для прямого и обратного считывания показаны на Рис. 2.4. Синим цветом обозначены “размытые” функции отклика для среденго смещения атомов  $\overline{\Delta L} = 2$  (шестая часть длины ячейки), красным – для среднего смещения атомов  $\overline{\Delta L} = 12$  (длина всей ячейки), а тонкой пунктирной линией на графиках приведены исходные функции отклика.

В итоге, мы можем получить ядро полуцикла, учитывающего этапы записи и хранения, заменив в выражении (2.29) исходные функции отклика на “размытые”

$$G_{ab}(z, t; \overline{\Delta L}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt[4]{\lambda_i} g_i(z; \overline{\Delta L}) \psi_i(t). \quad (2.34)$$

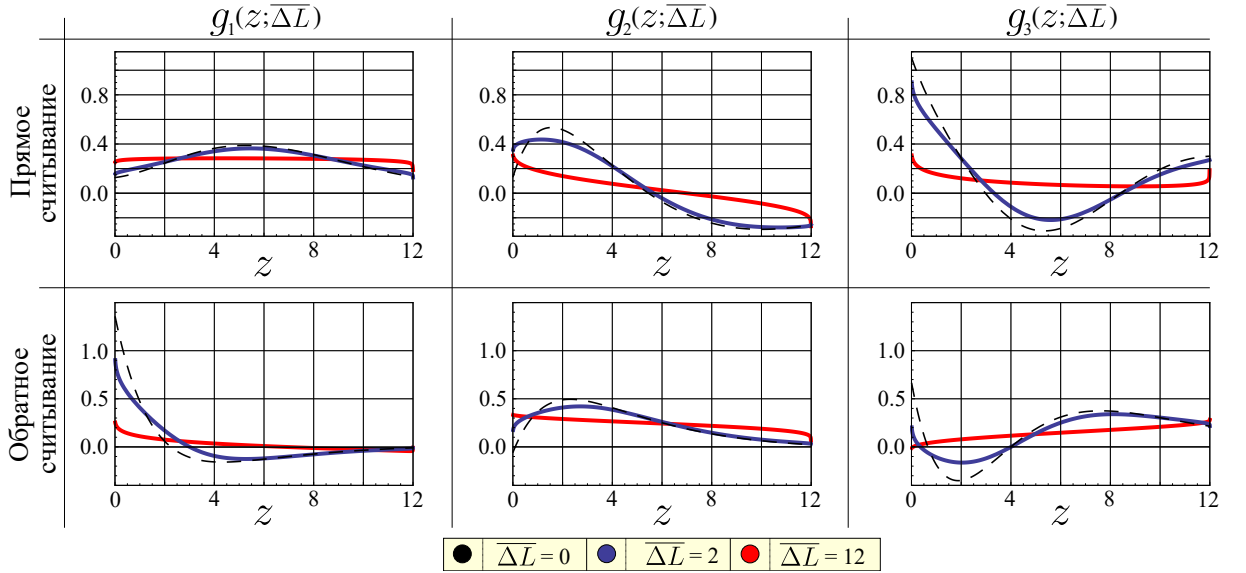


Рис. 2.4: Первые три “размытые” функции отклика для прямого и обратного считывания при среднем смещении атомов  $\overline{\Delta L} = 2$  и  $\overline{\Delta L} = 12$ .

Соответственно, ядра полного цикла памяти для прямого и обратного считывания, содержащие в себе все три этапа, будут задаваться выражениями

$$G^{for}(t, t'; \overline{\Delta L}) = \int_0^L dz G_{ba}(z, t) G_{ab}(L - z, t'; \overline{\Delta L}), \quad (2.35)$$

$$G^{back}(t, t'; \overline{\Delta L}) = \int_0^L dz G_{ba}(z, t) G_{ab}(z, t'; \overline{\Delta L}). \quad (2.36)$$

Используем разложения (2.29) и (2.34) для ядер полуциклов и получим

$$G(t, t'; \overline{\Delta L}) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j} F_{ij}(\overline{\Delta L}) \psi_i(t) \psi_j(t'), \quad (2.37)$$

где мы ввели интегралы перекрытия между размытыми функциями отклика и исходными как

$$F_{ij}^{for}(\overline{\Delta L}) = \int_0^L dz g_i(z) g_j(L - z; \overline{\Delta L}), \quad (2.38)$$

$$F_{ij}^{back}(\overline{\Delta L}) = \int_0^L dz g_i(z) g_j(z; \overline{\Delta L}). \quad (2.39)$$

## 2.4.2 Учет поперечного движения атомов

Теперь перейдем к рассмотрению поперечного движения атомов. В этом случае распределение атомов по поперечным скоростям  $\mathbf{v}_\rho = (v_x, v_y)$  будет описываться распределением Максвелла:

$$dN_{\mathbf{v}_\rho} = \frac{1}{\pi u_\rho^2} \exp\left(-\frac{\mathbf{v}_\rho^2}{u_\rho^2}\right) d^2 \mathbf{v}_\rho, \quad (2.40)$$

где  $u_\rho$  – средне-квадратичная скорость поперечного движения, а  $dN_{\mathbf{v}_\rho}$  – число атомов со скоростями, лежащими в промежутке  $(\mathbf{v}_\rho, \mathbf{v}_\rho + d\mathbf{v}_\rho)$ , а условие на температуру ансамбля атомов (2.30) остается неизменным.

Аналогично предыдущему пункту, выделим подансамбль атомов, движущихся как целое со скоростью  $\mathbf{v}_\rho$  в поперечном направлении. Для него когерентность на момент окончания этапа хранения будет связана с когерентностью, образовавшейся в процессе записи, соотношением

$$\hat{B}_{\mathbf{v}_\rho}(\boldsymbol{\rho}, z, T_w + T_s) = \hat{B}_{\mathbf{v}_\rho}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}_\rho T_s, z, T_w). \quad (2.41)$$

Для того, чтобы перейти ко всему ансамблю атомов, усредним вклады от каждого подансамбля атомов с соответствующим статистическим весом:

$$\hat{B}(\boldsymbol{\rho}, z, T_w + T_s; \overline{\Delta w}) = \frac{1}{\pi u_\rho^2} \sqrt{\frac{S}{S'}} \iint_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{v}_\rho \exp\left(-\frac{\mathbf{v}_\rho^2}{u_\rho^2}\right) \hat{B}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}_\rho T_s, z, T_w). \quad (2.42)$$

где  $\overline{\Delta w} = u_\rho T_s$  – среднее смещение атомов в поперечном направлении за время хранения в результате теплового движения, характеризующее время хранения при заданной температуре атомного ансамбля. Отметим, что поля на входе  $\hat{a}_{in}$  и выходе  $\hat{a}_{out}$  из ячейки памяти будут иметь различные поперечные размеры пучков. При этом, если считать, что память является идеальной, то суммарный поток фотонов до и после ячейки памяти не должен измениться. Чтобы учесть этот факт и сохранить нормировку поперечных мод в выражении (2.42) присутствует множитель  $\sqrt{S/S'}$ , где  $S$  – площадь поперечной моды входного поля, а  $S'$  – площадь поперечной моды после размытия. Если в выражении (2.42) перейти от операторов к соответствующим им фурье-образам, то мы получим достаточно простое соотношение

$$\hat{b}(\mathbf{q}, z, T_w + T_s; \overline{\Delta w}) = \sqrt{\frac{S}{S'}} \exp\left(-\frac{\mathbf{q}^2 \overline{\Delta w}^2}{4}\right) \hat{b}(\mathbf{q}, z, T_w). \quad (2.43)$$

В нашей работе входные поля будут поперечно одномодовыми и их профиль будет задаваться гауссовой функцией

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} e^{-\frac{\boldsymbol{\rho}^2}{w_0^2}} \quad (2.44)$$

с полушириной  $w_0$ . В этом случае поперечный профиль поля на выходе так же будет задаваться гауссовой функцией, но с большей полушириной

$$f(\boldsymbol{\rho}; \overline{\Delta w}) = \sqrt{\frac{2}{\pi(w_0^2 + \overline{\Delta w}^2)}} e^{-\frac{\boldsymbol{\rho}^2}{w_0^2 + \overline{\Delta w}^2}}. \quad (2.45)$$

## 2.5 Влияние дифракции в отсутствии теплового движения атомов

Если мы будем уменьшать поперечные размеры импульса сигнального поля при достаточно большой эффективной оптической длине атомного ансамбля, то становится необходимым учитывать в выражениях (2.21), (2.22) и (2.23) множители, связанные с

дифракцией. При этом мы снова пренебрежем тепловым движением атомов на этапе хранения полагая  $b(\mathbf{q}, z, T_w + T_s) = b(\mathbf{q}, z, T_w)$ .

В случае прямого считывания из выражений (2.21) и (2.22) следует, что поля на входе и выходе будут связаны как

$$a_{out}^{for}(\mathbf{q}, t) = e^{-i\frac{\mathbf{q}^2}{2k_s}L} \int_0^{T_w} dt' G^{for}(t, t') a_{in}(\mathbf{q}, T_w - t') + vac, \quad (2.46)$$

где ядро памяти по прежнему задается выражением (2.25). Мы видим, что при прямом считывании дифракция приводит к появлению общего набега фазы, зависящего от  $\mathbf{q}$  и одинакового для всех мод памяти. Этот набег фазы может быть легко скомпенсирован при процедуре измерения, например, с помощью гомодина.

Кардинально иная ситуация возникает при обратном считывании в аналогичном выражении, полученном из формул (2.21) и (2.23):

$$a_{out}^{back}(\mathbf{q}, t) = \int_0^{T_w} dt' G^{back}(\mathbf{q}, t, t') a_{in}(\mathbf{q}, T_w - t') + vac, \quad (2.47)$$

где множитель, связанный с дифракцией, оказывается в ядре под знаком интеграла

$$G^{back}(\mathbf{q}, t, t') = \int_0^L dz e^{-i\frac{\mathbf{q}^2}{k_s}z} G_{ba}(z, t) G_{ab}(z, t'). \quad (2.48)$$

Это приводит к перемешиванию между модами памяти и, как мы увидим потом, к перемешиванию квадратур. Воспользуемся разложением для ядра полуцикла памяти (2.29), тогда ядро памяти с дифракцией (2.48) может быть разложено как

$$G^{back}(\mathbf{q}, t, t') = \sum_{i,j=1}^{\infty} \sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j} F_{ij}(\mathbf{q}) \psi_i(t) \psi_j(t'), \quad (2.49)$$

где введены функции

$$F_{ij}(\mathbf{q}) = \int_0^L dz e^{-i\frac{\mathbf{q}^2}{k_s}z} g_i(z) g_j(z). \quad (2.50)$$

Функции  $F_{ij}(\mathbf{q})$  характеризуют перемешивание между различными модами памяти, возникающее вследствие дифракции.

## 2.6 Влияние дифракции при наличии теплового движения

Сперва рассмотрим случай продольного движения атомов. Размытие спиновой когерентности приводит к изменению фазовой зависимости. В частности, при прямом считывании больше нельзя считать, что дифракция сводится к набегу постоянной фазы как для неподвижных атомов, так как экспоненциальные множители, зависящие от продольной координаты  $z$  в выражениях (2.21) и (2.23), уже не компенсируют друг друга.

Из-за дифракции при записи когерентности (2.21) возникает набег фазы. Чтобы учесть этот набег при “размытии” функций отклика в выражении (2.33) нам необходимо

заменить функции отклика на функции отклика с соответствующим фазовым множителем, то есть

$$g_i(\mathbf{q}, z; \overline{\Delta L}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}u_z} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \exp\left(-\frac{v_z^2}{u_z^2}\right) e^{-i\frac{\mathbf{q}^2}{2k_s}z} g_i(z - v_z T_s). \quad (2.51)$$

Тогда ядро полуцикла памяти, включающее в себя этапы записи и хранения, можно представить в виде ряда

$$G_{ab}(\mathbf{q}, z, t; \overline{\Delta L}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt[4]{\lambda_i} g_i(\mathbf{q}, z; \overline{\Delta L}) \psi_i(t). \quad (2.52)$$

Ядра полного цикла памяти, учитывающего продольное тепловое движение на этапе хранения и влияние дифракции, имеют вид

$$G^{for}(\mathbf{q}, t, t'; \overline{\Delta L}) = \int_0^L dz e^{-i\frac{\mathbf{q}^2}{2k_s}z} G_{ba}(z, t) G_{ab}(\mathbf{q}, L - z, t'; \overline{\Delta L}), \quad (2.53)$$

$$G^{back}(\mathbf{q}, t, t'; \overline{\Delta L}) = \int_0^L dz e^{-i\frac{\mathbf{q}^2}{2k_s}z} G_{ba}(z, t) G_{ab}(\mathbf{q}, z, t'; \overline{\Delta L}). \quad (2.54)$$

Из (2.29) и (2.52) следует, что для них будет справедливо разложение

$$G(\mathbf{q}, t, t'; \overline{\Delta L}) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j} F_{ij}(\mathbf{q}, \overline{\Delta L}) \psi_i(t) \psi_j(t'), \quad (2.55)$$

где перекрывание мод из-за дифракции и продольного теплового движения для случаев прямого и обратного считывания находятся как

$$F_{ij}^{for}(\mathbf{q}, \overline{\Delta L}) = \int_0^L dz e^{-i\frac{\mathbf{q}^2}{2k_s}z} g_i(z) g_j(\mathbf{q}, L - z; \overline{\Delta L}) \quad (2.56)$$

$$F_{ij}^{back}(\mathbf{q}, \overline{\Delta L}) = \int_0^L dz e^{-i\frac{\mathbf{q}^2}{2k_s}z} g_i(z) g_j(\mathbf{q}, z; \overline{\Delta L}). \quad (2.57)$$

В результате продольное тепловое движение вкупе с дифракцией приведет не только к перемешиванию мод памяти, но может привести и к подмешиванию растянутой квадратуры к сжатой. Причем перемешивание квадратур будет проявляться как для обратного считывания, так и для прямого.

Иная ситуация возникает при поперечном тепловом движении. Как мы можем видеть из выражения (2.43), поперечное тепловое движение приводит к появлению дополнительного множителя при записанной когерентности  $\hat{b}(\mathbf{q}, z, T_w)$ , который зависит только от поперечного волнового вектора  $\mathbf{q}$ . Этот множитель может быть вынесен из ядра памяти за знак интеграла как при прямом считывании, так и при обратном. Поэтому как и в отсутствие дифракции, поперечное тепловое движение атомов приведет только к увеличению апертуры выходного импульса.

# Глава 3

## Сохранение квадратурно-сжатого света

### 3.1 Одномодовый режим работы памяти

В прошлой главе мы учли влияние некоторых негативных эффектов в модели памяти. Теперь мы можем оценить влияние этих эффектов на сохранение квадратурно-сжатого импульса света, записанного в ячейку памяти.

Для начала исследуем одномодовый режим работы памяти. В этом случае временной профиль поля на входе представляет собой одну из собственных мод памяти, а все остальные собственные моды находятся в вакуумном состоянии, то есть

$$\hat{A}_{in}(\boldsymbol{\rho}, t) = f(\boldsymbol{\rho})\psi_{\beta}(t)\hat{a}_{\beta} + vac. \quad (3.1)$$

Здесь  $\beta$  – номер записываемой моды, а  $\hat{a}_{\beta}$  – оператор рождения фотонов в соответствующей моде, подчиняющийся коммутационному соотношению

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_l^{\dagger}] = \delta_{jl}. \quad (3.2)$$

Квадратурные компоненты оператора  $\hat{a}_{\beta}$  мы определим стандартным образом

$$\hat{a}_{\beta} = \hat{x}_{\beta} + i\hat{y}_{\beta}. \quad (3.3)$$

При этом  $x$ -квадратура оператора будет сжата, а  $y$ -квадратура – растянута. Корреляционные функции для них будут иметь вид

$$\langle \hat{x}_{\beta}^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-r_{\beta}}, \quad \langle \hat{y}_{\beta}^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{r_{\beta}}, \quad (3.4)$$

где  $r_{\beta}$  – параметр сжатия моды с номером  $\beta$ .

В качестве процедуры измерения мы возьмем балансное гомодинное детектирование [30, 31]. При гомодинировании с локальным осциллятором (ЛО)  $L(\boldsymbol{\rho}, t)$  фототок будет задаваться выражением

$$\hat{i}(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{\rho} \hat{A}_{out}(\boldsymbol{\rho}, t) L^*(\boldsymbol{\rho}, t) + h.c. \quad (3.5)$$

В этом разделе нас будет интересовать максимальная степень сжатия импульса. В связи с этим будем следить за фототоком на нулевой частоте

$$\hat{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{T_w}} \int_0^{T_w} dt \hat{i}(t), \quad (3.6)$$

а наблюдаемой величиной будет  $\langle \hat{i}_0^2 \rangle$ , для которой справедливо равенство

$$\langle \hat{i}_0^2 \rangle = \frac{1}{T_w} \iint_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{\rho} \int_0^{T_w} dt |L(\boldsymbol{\rho}, t)|^2 + \langle : \hat{i}_0^2 : \rangle, \quad (3.7)$$

где первое слагаемое отвечает величине дробового шума, а обозначение  $\langle : \dots : \rangle$  указывает на нормальный порядок операторов при усреднении. В дальнейшем сжатие величин  $\langle \hat{i}_0^2 \rangle$  будет выражено в децибелах относительно соответствующего им уровня дробового шума.

Для наглядности получим явный вид фототока (3.6) для каждого из случаев, описанных в предыдущей главе.

### Память без дифракции и теплового движения

В отсутствии каких-либо негативных эффектов при прохождении ячейки памяти амплитуда поля уменьшается, но форма профиля при этом остается неизменной

$$\hat{A}_{out}(\boldsymbol{\rho}, t) = \sqrt{\lambda_\beta} f(\boldsymbol{\rho}) \psi_\beta(t) \hat{a}_\beta + vac. \quad (3.8)$$

При детектировании в качестве локального осциллятора разумно взять ту же собственную моду

$$L(\boldsymbol{\rho}, t) = f(\boldsymbol{\rho}) \psi_\beta(t). \quad (3.9)$$

Тогда детектируемый фототок будет иметь вид

$$\hat{i}_0 = \frac{2}{\sqrt{T_w}} \sqrt{\lambda_\beta} \hat{x}_\beta. \quad (3.10)$$

### Память с учетом продольного теплового движения

При продольном тепловом движении когерентность, образовавшаяся в среде, размывается, что приводит к перемешиванию мод в памяти. Поэтому выходной сигнал будет представлять собой сумму мод

$$\hat{A}_{out}(\boldsymbol{\rho}, t) = f(\boldsymbol{\rho}) \sum_i \sqrt[4]{\lambda_i \lambda_\beta} F_{i\beta} \psi_i(t) \hat{a}_\beta + vac. \quad (3.11)$$

Локальный осциллятор в этом случае мы возьмем совпадающим по форме с выходным импульсом, то есть

$$L(\boldsymbol{\rho}, t) = f(\boldsymbol{\rho}) \sum_j \sqrt[4]{\lambda_j \lambda_\beta} F_{j\beta} \psi_j(t). \quad (3.12)$$

Это позволит отсеять при детектировании лишний шум. Детектируемый при этом фототок определяется выражением

$$\hat{i}_0 = \frac{2}{\sqrt{T_w}} \sum_i \sqrt{\lambda_i \lambda_\beta} F_{i\beta}^2 \hat{x}_\beta. \quad (3.13)$$



## Память с учетом дифракции

Теперь рассмотрим случай, когда необходимо учитывать влияние дифракции. При обратном считывании поле на выходе ячейки памяти будет

$$\hat{A}_{out}^{back}(\boldsymbol{\rho}, t) = \sum_i \sqrt[4]{\lambda_i \lambda_\beta} \{F_{i\beta}(\boldsymbol{\rho}) * f(\boldsymbol{\rho})\} \psi_i(t) \hat{a}_\beta + vac. \quad (3.14)$$

Здесь  $\{\dots * \dots\}$  – обозначает свертку функций по поперечной координате  $\boldsymbol{\rho}$ . Как и в предыдущих пунктах, мы возьмем локальный осциллятор, совпадающий с профилем выходного поля

$$L(\boldsymbol{\rho}, t) = \sum_j \sqrt[4]{\lambda_j \lambda_\beta} \{F_{j\beta}(\boldsymbol{\rho}) * f(\boldsymbol{\rho})\} \psi_j(t). \quad (3.15)$$

Тогда выражение для фототока на нулевой частоте будет иметь вид

$$\hat{i}_0^{back} = \frac{2}{\sqrt{T_w}} \sum_i \sqrt{\lambda_i \lambda_\beta} \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{\rho} |\{F_{i\beta}(\boldsymbol{\rho}) * f(\boldsymbol{\rho})\}|^2 \right) \hat{x}_\beta. \quad (3.16)$$

Отметим, что выбор правильного локального осциллятора позволяет не только отсеять лишний шум, но и избежать подмешивания разжатой квадратуры в полезный сигнал.

Для сравнения рассмотрим случай, когда мы пренебрежем наличием эффекта дифракции при выборе локального осциллятора и выберем его форму как для случая без дифракции (3.9). Тогда в фототоке появится вклад от растянутой квадратуры

$$\hat{i}_0^{back} = \frac{2}{\sqrt{T_w}} \lambda_\beta \left( \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{\rho} \Re[\{F_{\beta\beta}(\boldsymbol{\rho}) * f(\boldsymbol{\rho})\}] \right) \hat{x}_\beta + \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{\rho} \Im[\{F_{\beta\beta}(\boldsymbol{\rho}) * f(\boldsymbol{\rho})\}] \right) \hat{y}_\beta \right). \quad (3.17)$$

В этом выражении через  $\Re[\dots]$  и  $\Im[\dots]$  обозначены реальная и мнимая части, соответственно.

При прямом считывании перемешивания мод не происходит и поле на выходе из ячейки памяти имеет вид записанной моды, но с измененным поперечным профилем

$$\hat{A}_{out}^{for}(\boldsymbol{\rho}, t) = F^{for}(\boldsymbol{\rho}) \sqrt{\lambda_\beta} \psi_\beta(t) \hat{a}_\beta + vac, \quad (3.18)$$

где за  $F^{for}(\boldsymbol{\rho})$  мы обозначили поперечный профиль с учетом фазового набегга, который находится по формуле

$$F^{for}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{q} f(\mathbf{q}) e^{-i\frac{\mathbf{q}^2}{2k_s} L} e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}. \quad (3.19)$$

А в качестве локального осциллятора мы возьмем

$$L(\boldsymbol{\rho}, t) = F^{for}(\boldsymbol{\rho}) \psi_\beta(t). \quad (3.20)$$

Тогда фототок на нулевой частоте будет определяться выражением

$$\hat{i}_0^{for} = \frac{2}{\sqrt{T_w}} \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{\rho} |F^{for}(\boldsymbol{\rho})|^2 \right) \sqrt{\lambda_\beta} \hat{x}_\beta. \quad (3.21)$$

Как и для обратного считывания, рассмотрим случай неудачно подобранного локального осциллятора. Когда форма локального осциллятора задается выражением (3.9), фототок будет

$$\hat{i}_0^{for} = \frac{2}{\sqrt{T_w}} \lambda_\beta \left( \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} d\rho \Re[\{F^{for}(\rho) * f(\rho)\}] \right) \hat{x}_\beta + \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} d\rho \Im[\{F^{for}(\rho) * f(\rho)\}] \right) \hat{y}_\beta \right). \quad (3.22)$$

### Память с учетом дифракции и теплового движения

Когда мы учитываем продольное тепловое движение совместно с дифракцией согласно (2.55), выходной сигнал будет иметь вид

$$\hat{A}_{out}(\rho, t) = \sum_i \sqrt[4]{\lambda_i \lambda_\beta} \{F_{i\beta}(\rho; \overline{\Delta L}) * f(\rho)\} \psi_i(t) \hat{a}_\beta + vac. \quad (3.23)$$

где функции для прямого считывания задаются выражением (2.56), а для обратного – выражением (2.57). В данном случае мы будем рассматривать только форму локального осциллятора, совпадающую с формой выходного сигнала, то есть

$$L(\rho, t) = \sum_j \sqrt[4]{\lambda_j \lambda_\beta} \{F_{j\beta}(\rho; \overline{\Delta L}) * f(\rho)\} \psi_j(t). \quad (3.24)$$

И тогда интересующий нас фототок будет задаваться выражением

$$\hat{i}_0 = \frac{2}{\sqrt{T_w}} \sum_i \sqrt{\lambda_i \lambda_\beta} \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} d\rho |\{F_{i\beta}(\rho; \overline{\Delta L}) * f(\rho)\}|^2 \right) \hat{x}_\beta. \quad (3.25)$$

Как уже говорилось ранее, поперечное тепловое движение приводит к увеличению поперечного сечения выходного пучка. В связи с этим, для фототока на нулевой частоте с точностью до замены  $f(\rho) \rightarrow f(\rho; \overline{\Delta w})$  будут справедливы выражения (3.16) и (3.17) для обратного считывания и выражения (3.21) и (3.22) для прямого считывания.

Зная как выражаются фототоки для каждого из случаев, мы можем рассчитать, как будет сохраняться сжатие мод. Для численных расчетов были взяты величины  $T_w = 10$ ,  $L = 12$ ,  $w_0 = 0.072$ ,  $k_s = 9 \cdot 10^3$  и  $2g^2 N / \Omega = 1.2 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$ . В размерных величинах это соответствует длине ансамбля  $L = 1$  см, ширине перетяжки  $w_0 = 60$  мкм и длине волны света  $\lambda = 580$  нм. Параметр сжатия мод на входе  $r = 2.3$ , что отвечает сжатию в  $-10$  дБ. На Рис. 3.1 представлены результаты численных расчетов. В обозначениях мы ввели дифракционный параметр  $q_0 = 1/w_0$ . Случаю, когда влиянием дифракции можно пренебречь, отвечает значение параметра  $q_0 = 0$ .

Продольное тепловое движение оказывает сильное влияние на сжатие мод, сохраненных в ячейке памяти. При этом лучше всего сохраняются моды с более “простым” временным профилем, функции отклика которых имеют наименьшее число узлов. Для прямого считывания лучше всего сохраняется первая мода, а для обратного считывания

– вторая. Сжатие этих мод остается на хорошем уровне даже при средних смещениях атомов порядка длины ячейки.

В случае, когда дифракционным множителем уже нельзя пренебречь, подмешивание растянутой квадратуры к полезному сигналу может значительно ухудшить сжатие. Но при работе в одномодовом режиме правильный подбор локального осциллятора позволяет полностью избавиться от вклада растянутой квадратуры в наблюдаемые величины. Поскольку влияние дифракции сильно зависит от ширины перетяжки сигнального луча, то увеличение перетяжки вследствие поперечного теплового движения ведет к ослаблению влияния дифракции.

Когда нам необходимо учитывать одновременно и влияние дифракции и наличие продольного теплового движения, основной вклад в ухудшение сжатия мод вносит именно тепловое движение, так как в одномодовом режиме удается избавиться от примеси растянутой квадратуры в полезном сигнале.

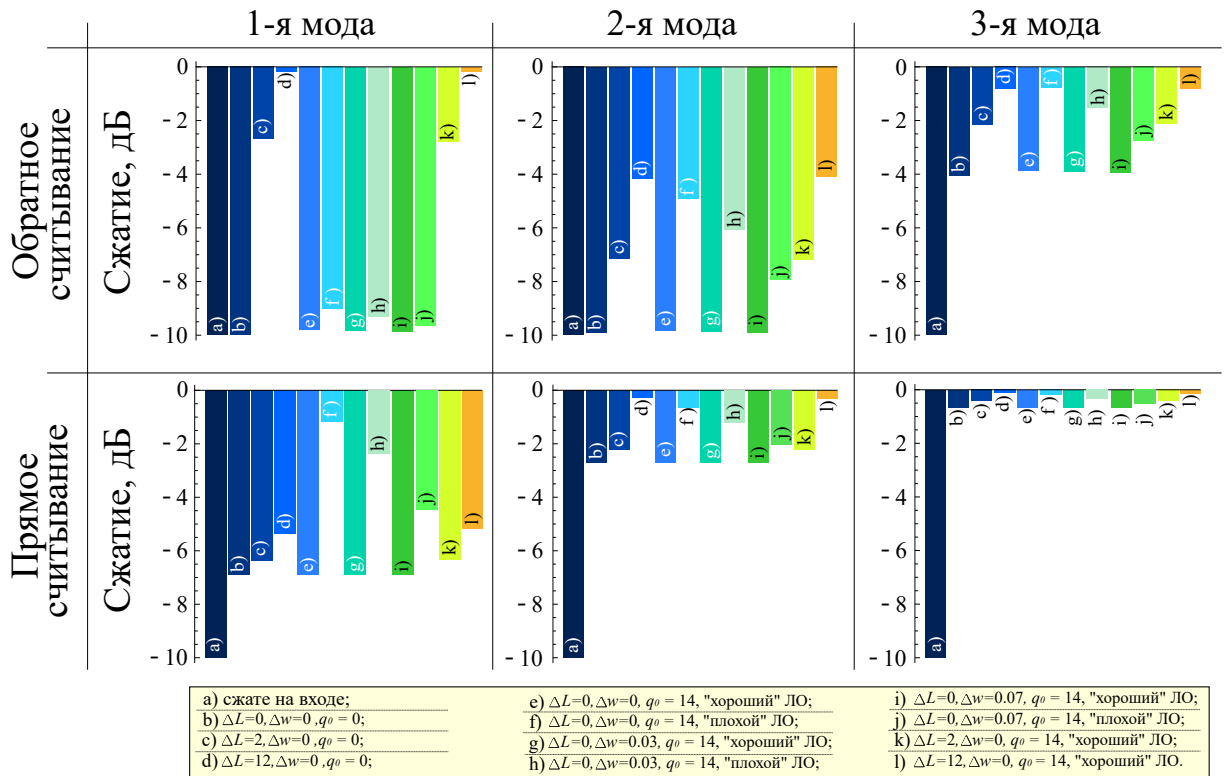


Рис. 3.1: Степень сжатия сигнального поля с профилем одной из собственных функций на входе в ячейку памяти (a) и на выходе из нее (b – l) при различных параметрах. Выбор оптимального локального осциллятора обозначен как “хороший” ЛО, неоптимального – как “плохой” ЛО.

## 3.2 Пути оптимизации одномодового режима

Одним из возможных вариантов улучшения сохранения мод является учет негативных эффектов при нахождении собственных функций памяти. В этом разделе мы бу-

дем сохранять собственные моды памяти, найденные с учетом продольного теплового движения, и моды, найденные с учетом влияния дифракции.

### 3.2.1 Моды памяти с учетом теплового движения

Из предыдущего пункта мы знаем, что наиболее губительным при работе в одномодовом режиме оказывается влияние продольного теплового движения. Тем не менее, так как ядро памяти  $G(t, t'; \overline{\Delta L})$  остается симметричным по перестановке аргументов [32], мы можем найти собственные функции ядра памяти, учитывающие продольное тепловое движение, как

$$\sqrt{\lambda_i} \psi_i^{\overline{\Delta L}}(t) = \int_0^{T_w} dt' G(t, t'; \overline{\Delta L}) \psi_i^{\overline{\Delta L}}(t'). \quad (3.26)$$

В этом пункте мы не будем подробно расписывать получение фототока для каждого из случаев. Они получаются аналогичным образом, с учетом того, что новые функции  $\psi_i^{\overline{\Delta L}}$  необходимо разложить по исходным  $\psi_i$ .

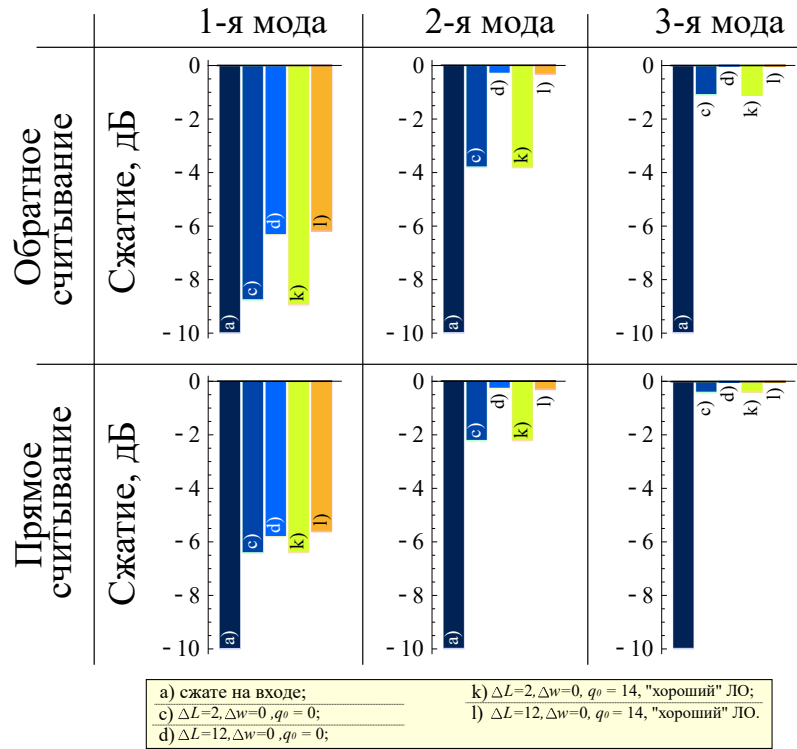


Рис. 3.2: Степень сжатия сигнального поля с профилем одной из собственных функций, найденных с учетом продольного теплового движения, на входе в ячейку памяти (a) и на выходе из нее (c, d, k, l) при различных параметрах.

При расчетах использовались те же параметры, что и в предыдущем пункте. Результаты приведены на Рис. 3.2. Мы видим, что благодаря такому подходу можно подобрать временной профиль моды, обеспечивающий сохранение достаточно высокого сжатия при средних смещениях атомов порядка длины ячейки. При этом, наличие дифракции не

оказывает сильного влияния на сохранение сжатия, потому что правильный подбор локального осциллятора позволяет полностью подавить вклад от растянутой квадратуры.

Минусом этого подхода оптимизации является то, что форму записываемого сигнала необходимо подбирать зная точно среднее смещение атомов за время хранения, что не всегда представляется возможным.

### 3.2.2 Моды памяти с учетом дифракции

Другая возможность улучшить сохранение сжатия в одномодовом режиме – найти собственные функции памяти, учитывающие влияние дифракции. Эта задача актуальна только для случая обратного считывания, при котором дифракционный множитель находится внутри ядра памяти. Для каждого фиксированного  $\mathbf{q}$  ядро памяти  $G^{back}(\mathbf{q}, t, t')$  симметрично по перестановке аргументов  $t$  и  $t'$ , поэтому для него могут быть найдены собственные функции

$$\sqrt{\lambda_i(\mathbf{q})}\psi_i^{dif}(\mathbf{q}, t) = \int_0^{T_w} dt' G^{back}(\mathbf{q}, t, t')\psi_i^{dif}(\mathbf{q}, t'). \quad (3.27)$$

При этом эффективность сохранения мод  $\lambda_i(\mathbf{q})$  постепенно уменьшается с увеличением длины поперечного волнового вектора  $\mathbf{q}$ . На вход ячейки памяти мы будем подавать одну из собственных мод, ограниченных по  $\mathbf{q}$  Гауссовым профилем, то есть  $f_{\mathbf{q}}\psi_i^{dif}(\mathbf{q}, t')$ , где  $f_{\mathbf{q}}$  – фурье-образ от  $f(\boldsymbol{\rho})$ .

Как видно из Рис. 3.3, мы получаем одну моду, сжатие которой при прохождении ячейки памяти остается практически неизменным. При поперечном тепловом движении увеличение поперечного сечения пучка приводит к уменьшению диапазона поперечных волновых векторов  $\mathbf{q}$ , участвующих в процессе сохранения импульса. Из-за этого эффективность сохранения импульса в целом растет и сжатие немного увеличивается. Но найденные моды сильно подвержены влиянию продольного теплового движения, и даже при относительно небольших средних смещениях атомов сжатие всех мод значительно падает.

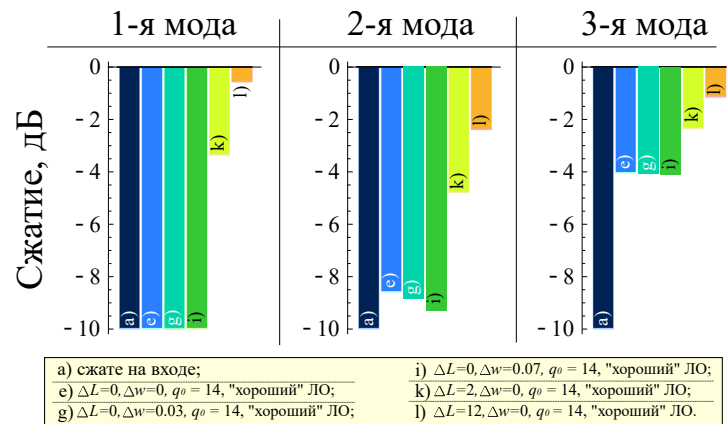


Рис. 3.3: Степень сжатия сигнального поля с профилем одной из собственных функций, найденных с учетом дифракции, на входе в ячейку памяти (а) и на выходе из нее (с, г, и, к, л) при различных параметрах.

## 3.3 Сохранение широкополосного сжатого света

### 3.3.1 Субпуассоновский лазер с захватом фазы

Теперь рассмотрим как в нашей модели памяти сохраняется импульс от источника широкополосного квадратурно-сжатого света. В качестве такого источника мы возьмем субпуассоновский лазер с захватом фазы.

Для начала нам следует связать амплитуду внутрирезонаторного поля  $\hat{a}(t)$  с амплитудой поля на выходе из него  $\hat{A}(\boldsymbol{\rho}, t)$ . Внутрирезонаторное поле  $\hat{E}_{res}(\boldsymbol{\rho}, t)$  связывается с полем вне резонатора  $\hat{E}(\boldsymbol{\rho}, t)$  с помощью граничного условия на выходном зеркале (считаем, что зеркало расположено в точке  $z = 0$  и опускаем зависимость операторов от  $z$ )

$$\hat{E}(\boldsymbol{\rho}, t) = \sqrt{\tau} \hat{E}_{res}(\boldsymbol{\rho}, t) - \sqrt{r} \hat{E}_{vac}(\boldsymbol{\rho}, t), \quad (3.28)$$

где  $\hat{E}_{vac}(\boldsymbol{\rho}, t)$  – вакуумное поле, отраженное от внешней стороны зеркала, а  $\tau$  и  $r$  энергетические коэффициенты пропускания и отражения, соответственно. При этом считаем, что на зеркале нет потерь энергии ( $r + \tau = 1$ ), а резонатор считаем высокодобротным, т.е.  $\sqrt{r} \rightarrow 1$  и  $\tau \ll 1$ . В нашей задаче внутрирезонаторное поле на выходе из резонатора может быть факторизовано и записано в виде [33]

$$\hat{E}_{res}(\boldsymbol{\rho}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_s}{2 \varepsilon_0 L_{res}}} e^{-i \omega_s t} f(\boldsymbol{\rho}) \hat{a}_{res}(t) + h.c.. \quad (3.29)$$

Здесь  $L_{res}$  – длина резонатора, а  $\hat{a}_{res}(t)$  – амплитуда внутрирезонаторного поля, подчиняющаяся коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_{res}(t), \hat{a}_{res}^\dagger(t)] = 1. \quad (3.30)$$

Таким образом, если мы перепишем граничные условия (3.28) через амплитуды полей, то получим

$$\hat{A}(\boldsymbol{\rho}, t) = \sqrt{\kappa} f(\boldsymbol{\rho}) \hat{a}_{res}(t) - \hat{A}_{vac}(\boldsymbol{\rho}, t), \quad (3.31)$$

где  $\kappa = c\tau/L_{res}$  – спектральная ширина моды резонатора. Операторы  $\hat{A}(\boldsymbol{\rho}, t)$  и  $\hat{A}_{vac}(\boldsymbol{\rho}, t)$  подчиняются коммутационному соотношению для амплитуды поля в свободном пространстве (2.5), поэтому должно выполняться следующее равенство:

$$\sqrt{\kappa} f(\boldsymbol{\rho}) [\hat{a}_{res}(t), \hat{a}_{res}^\dagger(t')] = [\hat{a}_{res}(t), \hat{A}_{vac}^\dagger(\boldsymbol{\rho}, t')] + [\hat{A}_{vac}(\boldsymbol{\rho}, t), \hat{a}_{res}^\dagger(t')]. \quad (3.32)$$

Перейдем к рассмотрению квадратур полей

$$\hat{A}(\boldsymbol{\rho}, t) = \hat{X}(\boldsymbol{\rho}, t) + i \hat{Y}(\boldsymbol{\rho}, t), \quad (3.33)$$

$$\hat{a}_{res}(t) = \hat{x}(t) + i \hat{y}(t). \quad (3.34)$$

Среднеквадратичные флуктуации квадратур внутрирезонаторного поля для одномодового субпуассоновского лазера при работе в стационарном режиме описываются соотношениями [20, 21]

$$\langle : \delta \hat{x}(t) \delta \hat{x}(t') : \rangle = -\frac{p}{8} \frac{1 - \mu}{1 - \mu/2} e^{-\kappa(1-\mu/2)|t-t'|}, \quad (3.35)$$

$$\langle : \delta \hat{y}(t) \delta \hat{y}(t') : \rangle = \frac{1 - \mu}{\mu} e^{-\kappa\mu/2|t-t'|}. \quad (3.36)$$

Здесь  $p$  – параметр накачки (т.е.  $p = 0$  – совершенно случайная, а  $p = 1$  – строго регулярная), а  $\mu = \sqrt{n_0/n}$  – доля среднего числа фотонов синхронизирующего поля  $n_0$  в полной мощности выходного излучения  $n$ . Квадратуры снаружи резонатора, согласно выражению (3.31), будут связаны с внутррезонаторными квадратурами как

$$\hat{X}(\boldsymbol{\rho}, t) = \sqrt{\kappa} f(\boldsymbol{\rho}) \hat{x}(t) - \hat{X}_{vac}(\boldsymbol{\rho}, t), \quad (3.37)$$

$$\hat{Y}(\boldsymbol{\rho}, t) = \sqrt{\kappa} f(\boldsymbol{\rho}) \hat{y}(t) - \hat{Y}_{vac}(\boldsymbol{\rho}, t). \quad (3.38)$$

где  $\hat{X}_{vac}(\boldsymbol{\rho}, t)$  и  $\hat{Y}_{vac}(\boldsymbol{\rho}, t)$  – квадратуры вакуумного поля  $\hat{A}_{vac}(\boldsymbol{\rho}, t)$ .

В импульсный режим субпуассоновский лазер приводится путем вырезания диафрагмой импульсов длительностью  $T_w$ . При этом, что бы сохранялось сжатое состояние света, должно выполняться условие  $\kappa T_w \gg 1$ .

### 3.3.2 Сохранение импульса от СПЛ

Импульс сигнального поля на входе в ячейку памяти может быть разложен по модам Шмидта [34]

$$\hat{A}_{in}(\boldsymbol{\rho}, T_w - t) = f(\boldsymbol{\rho}) \sum_j \hat{a}_j \psi_j(t) + vac, \quad (3.39)$$

где  $\hat{a}_j$  – оператор рождения фотонов в  $j$ -ой моде, который подчиняется коммутационному соотношению (3.2). Субпуассоновский лазер является источником яркого света и для него амплитуда Гейзенберга может быть представлена в виде

$$\hat{A}_{in}(\boldsymbol{\rho}, t) = A_{in}(\boldsymbol{\rho}, t) + \delta \hat{A}_{in}(\boldsymbol{\rho}, t), \quad A_{in}(\boldsymbol{\rho}, t) \gg \delta \hat{A}_{in}(\boldsymbol{\rho}, t). \quad (3.40)$$

Здесь  $A_{in}(t)$  – классическая часть амплитуды, имеющая форму прямоугольного импульса с гауссовым поперечным профилем, а  $\delta \hat{A}_{in}(\boldsymbol{\rho}, t)$  – малые квантовые флуктуации. Из (3.40) следует, что и операторы  $\hat{a}_j$  могут быть представлены аналогичным образом, то есть

$$\hat{a}_j = A_j + \delta \hat{a}_j, \quad A_j \gg \delta \hat{a}_j, \quad (3.41)$$

где  $A_j$  – классическая часть, соответствующая среднему числу фотонов и  $j$ -ой моде, а  $\delta \hat{a}_j$  – квантовые флуктуации.

Определим квадратуры для операторов  $\hat{a}_j$  стандартным образом

$$\hat{a}_j = \hat{x}_j + i \hat{y}_j. \quad (3.42)$$

Зная (3.35), мы можем получить корреляционные функции флуктуаций квадратур мод

$$\langle : \delta \hat{x}_j \delta \hat{x}_l : \rangle = \int_0^{T_w} \int_0^{T_w} dt dt' \langle : \delta \hat{x}(T_w - t) \delta \hat{x}(T_w - t') : \rangle \psi_j(t) \psi_l(t') \quad (3.43)$$

Аналогичное разложение можно записать и для растянутой  $y$ -вадратуры.

Как и до этого, в качестве процедуры измерения будет выступать гомодинное детектирование (3.5). Но теперь нас будет интересовать сжатие во всем диапазоне частот,

это позволяет оценить полосу пропускания ячейки памяти. Поэтому мы будем следить за спектром сжатия флуктуаций фототока

$$\langle \delta \hat{i}_\omega \delta \hat{i}_{-\omega} \rangle = \frac{1}{T_w} \int_0^{T_w} \int_0^{T_w} dt dt' e^{-i\omega(t-t')} \langle \delta \hat{i}(t) \delta \hat{i}(t') \rangle. \quad (3.44)$$

При этом, справедливо равенство

$$\langle \delta \hat{i}_\omega \delta \hat{i}_{-\omega} \rangle = \frac{1}{T_w} \iint_{-\infty}^{+\infty} d\rho \int_0^{T_w} dt |L(\rho, t)|^2 + \langle : \delta \hat{i}_\omega \delta \hat{i}_{-\omega} : \rangle. \quad (3.45)$$

Здесь первое слагаемое отвечает величине дробового шума. Для удобства сравнения все спектры будут нормированы на соответствующие величины дробового шума.

Сразу отметим, что в качестве локального осциллятора при гомодинировании мы будем брать поле, совпадающее по форме с классической составляющей выходного поля. Получим явный вид флуктуаций фототока (3.5) для каждого из случаев.

### Память без дифракции и теплового движения

В случае, когда мы можем пренебречь влиянием дифракции и наличием теплового движения, а ядро памяти определяется (2.27), поле на выходе ячейки памяти имеет вид

$$\hat{A}_{out}(\rho, t) = f(\rho) \sum_i \sqrt{\lambda_i} \psi_i(t) \hat{a}_i + vac, \quad (3.46)$$

а поле локального осциллятора, совпадающее по форме с классической составляющей выходного поля, будет

$$L(\rho, t) = f(\rho) \sum_j \sqrt{\lambda_j} \psi_j(t) A_j. \quad (3.47)$$

Тогда флуктуации фототока при детектировании будут описываться выражением

$$\delta \hat{i}(t) = 2 \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \psi_i(t) \psi_j(t) A_j \delta \hat{x}_i. \quad (3.48)$$

### Память с учетом продольного теплового движения

Когда продольное смещение атомов за время хранения становится существенным, и мы уже не можем им пренебречь, сигнальное поле после прохождения ячейки памяти, согласно (2.37), будет

$$\hat{A}_{out}(\rho, t) = f(\rho) \sum_{ij} \sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j} F_{ij} \psi_i(t) \hat{a}_j + vac. \quad (3.49)$$

Соответственно, для такого поля форма локального осциллятора задается

$$L(\rho, t) = f(\rho) \sum_{kl} \sqrt[4]{\lambda_k \lambda_l} F_{kl} \psi_k(t) A_l. \quad (3.50)$$

И флуктуации фототока после детектирования записываются

$$\delta \hat{i}(t) = 2 \sum_{ijkl} \sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j} F_{ij} \sqrt[4]{\lambda_k \lambda_l} F_{kl} \psi_i(t) \psi_k(t) A_l \delta \hat{x}_j. \quad (3.51)$$



## Память с учетом дифракции

Теперь перейдем к случаю, когда нам необходимо учитывать дифракцию. Для обратного считывания из-за дифракции возникает перемешивание различных мод и выходной сигнал имеет вид

$$\hat{A}_{out}^{back}(\boldsymbol{\rho}, t) = \sum_{ij} \sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j} \{F_{ij}(\boldsymbol{\rho}) * f(\boldsymbol{\rho})\} \psi_i(t) \hat{a}_j + vac, \quad (3.52)$$

а локальный осциллятор при этом будет задаваться выражением

$$L(\boldsymbol{\rho}, t) = \sum_{kl} \sqrt[4]{\lambda_k \lambda_l} \{F_{kl}(\boldsymbol{\rho}) * f(\boldsymbol{\rho})\} \psi_k(t) A_l. \quad (3.53)$$

После детектирования с таким ЛО флуктуации фототока:

$$\begin{aligned} \delta \hat{i}^{back}(t) = & 2 \sum_{ijkl} \sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j} \sqrt[4]{\lambda_k \lambda_l} \psi_i(t) \psi_k(t) A_l \left( \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{\rho} \Re [\{F_{ij}(\boldsymbol{\rho}) * f(\boldsymbol{\rho})\} \{F_{kl}^*(\boldsymbol{\rho}) * f(\boldsymbol{\rho})\}] \right) \times \right. \\ & \left. \times \delta \hat{x}_j + \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{\rho} \Im [\{F_{ij}(\boldsymbol{\rho}) * f(\boldsymbol{\rho})\} \{F_{kl}^*(\boldsymbol{\rho}) * f(\boldsymbol{\rho})\}] \right) \delta \hat{y}_j \right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Отметим, что в формуле (3.54) коэффициент перед  $y$ -кватратурой обращается в ноль только при  $i = k, j = l$  или  $i = l, j = k$ . В связи с этим в спектре будут присутствовать избыточные шумы, связанные с подмешиванием растянутой квадратуры.

Абсолютно другая ситуация наблюдается для прямого считывания, при котором перемешивания мод не происходит:

$$\hat{A}_{out}^{for}(\mathbf{q}, t) = F^{for}(\boldsymbol{\rho}) \sum_i \sqrt{\lambda_i} \psi_i(t) \hat{a}_i + vac. \quad (3.55)$$

Для этого случая локальный осциллятор будет

$$L(\mathbf{q}, t) = F^{for}(\boldsymbol{\rho}) \sum_j \sqrt{\lambda_j} \psi_j(t) A_j, \quad (3.56)$$

а выражение для флуктуаций фототока примет вид

$$\delta \hat{i}^{for}(t) = 2 |F(\boldsymbol{\rho})|^2 \sum_{ij} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \psi_i(t) \psi_j(t) A_j \delta \hat{x}_i. \quad (3.57)$$

Таким образом, при прямом считывании с помощью подбора локального осциллятора правильной формы мы можем полностью избавиться от растянутой квадратуры в выходном фототоке.

## Память с учетом дифракции и теплового движения

Теперь рассмотрим случай, когда необходимо учитывать не только наличие дифракции, но и тепловое движение атомов. Когда атомы движутся в продольном направлении, ядро памяти будет описываться выражением (2.55). Тогда, сигнальный импульс после прохождения ячейки памяти будет иметь вид

$$\hat{A}_{out}(\boldsymbol{\rho}, t) = \sum_{ij} \sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j} \{F_{ij}(\boldsymbol{\rho}; \overline{\Delta L}) * f(\boldsymbol{\rho})\} \psi_i(t) \hat{a}_j + vac, \quad (3.58)$$

где функции  $F_{ij}(\boldsymbol{\rho}; \overline{\Delta L})$  задаются выражением (2.56) для прямого считывания и выражением (2.57) для обратного. Соответственно, форма локального осциллятора:

$$L(\boldsymbol{\rho}, t) = \sum_{kl} \sqrt[4]{\lambda_k \lambda_l} \{F_{kl}(\boldsymbol{\rho}; \overline{\Delta L}) * f(\boldsymbol{\rho})\} \psi_k(t) A_l. \quad (3.59)$$

Флуктуации фототока при гомодинном детектировании в этом случае будут описываться выражением

$$\begin{aligned} \delta \hat{i}(t) = & 2 \sum_{ijkl} \sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j} \sqrt[4]{\lambda_k \lambda_l} \psi_i(t) \psi_k(t) A_l \times \\ & \times \left( \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{\rho} \Re [\{F_{ij}(\boldsymbol{\rho}; \overline{\Delta L}) * f(\boldsymbol{\rho})\} \{F_{kl}^*(\boldsymbol{\rho}; \overline{\Delta L}) * f(\boldsymbol{\rho})\}] \right) \delta \hat{x}_j + \right. \\ & \left. + \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{\rho} \Im [\{F_{ij}(\boldsymbol{\rho}; \overline{\Delta L}) * f(\boldsymbol{\rho})\} \{F_{kl}^*(\boldsymbol{\rho}; \overline{\Delta L}) * f(\boldsymbol{\rho})\}] \right) \delta \hat{y}_j \right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Отсюда видим, что при совместном воздействии дифракции и продольного теплового движения растянутая квадратура будет давать вклад в наблюдаемый спектр как при обратном считывании, так и при прямом.

При поперечном тепловом движении выражение для флуктуаций фототока будет совпадать с выражением (3.57) при прямом считывании и с выражением (3.54) при обратном с точностью до замены исходного профиля сигнального поля на размытое, то есть  $f(\boldsymbol{\rho}) \rightarrow f(\boldsymbol{\rho}; \overline{\Delta w})$ .

При расчетах для субпуассоновского лазера мы взяли параметр накачки  $p = 1$ ,  $\mu = 0.01$  и спектральную ширину моды  $\kappa = 1$ , что соответствует сжатию на нулевой частоте в  $-10$  дБ. Значения всех остальных параметров те же, что и в предыдущих пунктах. Полученные спектры представлены на Рис 3.4. В отсутствие каких-либо негативных эффектов спектр для обратного считывания оказывается шире, чем для прямого. Это связано с тем, что количество эффективных мод для обратного считывания больше, чем для прямого.

В случае продольного движения атомов при относительно больших их средних смещениях порядка длины ячейки для обоих вариантов считывания эффективно сохраняется только одна из мод памяти. Из-за этого исчезают крылья спектра, образованные перекрестными членами между разными модами при гомодинировании (члены с  $i = k$  в выражении (3.54)). Это приводит к уменьшению ширины спектра и небольшому ухудшению сжатия.

При обратном считывании из-за дифракции происходит перемешивание квадратур. При этом вклад от растянутой квадратуры на низких частотах значительно меньше, чем на крыльях спектра. Это приводит к существенному ухудшению сжатия на крыльях и уменьшению ширины спектра. Если в ячейке атомы движутся в поперечном направлении, то с увеличением среднего смещения уменьшается вклад растянутой квадратуры

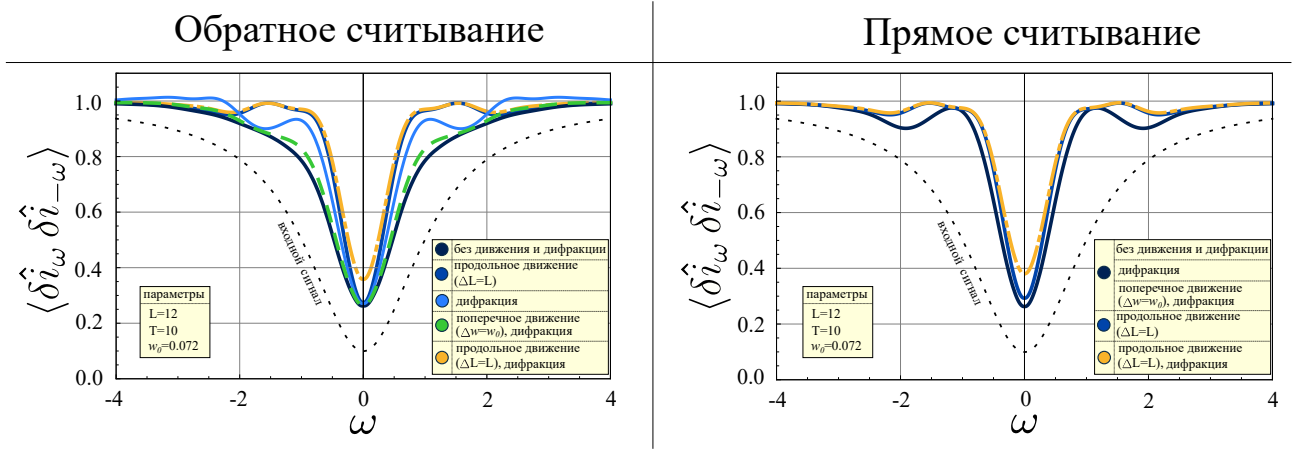


Рис. 3.4: Спектр сжатия сигнального поля от субпуассоновского лазера при различных параметрах.

в спектр. В то же время, для прямого считывания удается полностью скомпенсировать влияние дифракции, и ее присутствие никак не искажает спектр.

Тогда, когда при продольном движении нам необходимо учитывать дифракцию, так же остается одна мода, но за счет дифракции она содержит примесь растянутой квадратуры, что ухудшает сжатие. Это наблюдается как для случая обратного считывания, так и для прямого.

# Заключение

В настоящей работе продолжены исследования, начатые в работах [28, 29], и получены следующие результаты:

1. Был освоен аппарат квантовой оптики и с его помощью решена поставленная задача.
2. Обобщена модель быстрой резонансной памяти на случаи продольного и поперечного теплового движения на этапе хранения. Также учтено влияние дифракции для случаев прямого и обратного считываний.
3. Для прямого и обратного считываний найдены собственные функции (моды Шмидта) ядра памяти для случая неподвижного ансамбля атомов без учета дифракции. Исследовано сохранение отдельных сжатых мод при различных параметрах ячейки памяти.
4. Найдены собственные моды с учетом продольного теплового движения и собственные моды с учетом дифракции. Проанализировано насколько их использование может улучшить одномодовый режим работы памяти.
5. Исследована способность протокола к сохранению широкополосного импульса сжатого света при различных параметрах ячейки памяти. Получены спектры сжатия для каждого из случаев.

При работе в одномодовом режиме правильный подбор локального осциллятора при измерении позволяет полностью избавиться от примеси растянутой квадратуры. Для сжатых мод наиболее разрушительным является продольное тепловое движение, а поперечное тепловое движение не оказывает какого-либо негативного эффекта. Тем не менее, существуют моды, сжатие которых хорошо сохраняется даже при сравнительно большом среднем смещении атомов. Кроме того, зная среднее смещение атомов, возможно подобрать временной профиль моды, обеспечивающий оптимальное сохранение сжатия.

Так же мы можем сделать вывод, что даже при сравнительно большом среднем смещении атомов внутри ячейки квантовой памяти степень сжатия широкополосного импульса останется на достаточно высоком уровне, но ширина спектра уменьшается. При этом исключить влияние дифракции полностью нельзя, и ее присутствие ведет к ухудшению сжатия за счет подмешивания растянутой квадратуры.

# Литература

- [1] M. Fleischhauer, A. Imamoglu and J.P. Marangos. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media // *Rev. Mod. Phys.* – 2005. – Vol. 77. – P. 633–673.
- [2] M.D. Lukin. Colloquium: Trapping and manipulating photon states in atomic ensembles // *Rev. Mod. Phys.* – 2003. – Vol. 75. – P. 457.
- [3] L. Ma, O. Slattery and X. Tang. Optical quantum memory based on electromagnetically induced transparency // *Journal of Optics.* – 2017. – Vol. 19(4). – P. 043001.
- [4] A.V. Gorshkov, A. Andre, M.D. Lukin, and A.S. Sorensen. Photon storage in  $\Lambda$ -type optically dense atomic media. I-III. // *Phys. Rev. A.* – 2007. – Vol. 76. – P. 033804.
- [5] К.С. Самбурская, Т.Ю. Голубева, Ю.М. Голубев, Е. Giacobino. Квантовая голография при резонансном адиабатическом взаимодействии полей с атомной средой в  $\Lambda$ -конфигурации // *Опт. и Спектр.* – 2011. – Том 110(5). – С. 827–839.
- [6] A.V. Gorshkov, A. Andr'e, M.Fleischhauer, A.S. Sorensen, and M.D. Lukin. Universal Approach to Optimal Photon Storage in Atomic Media // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 98. – P. 123601.
- [7] A.E. Kozhekin, K. Molmer, and E. Polzik. Quantum memory for light // *Phys. Rev. A.* – 2000. – Vol. 62. – P. 033809.
- [8] J. Nunn, I.A. Walmsley, M.G. Raymer, K. Surmacz, F.C. Waldermann, Z. Wang, and D. Jaksch. Mapping broadband single-photon wave packets into an atomic memory // *Phys. Rev. A.* – 2007. – Vol. 75. – P. 011401(R).
- [9] A.V. Gorshkov, A. Andr'e, M.D. Lukin, and A.S. Sorensen. Photon storage in  $\Lambda$ -type optically dense atomic media. III. Effects of inhomogeneous broadening // *Phys. Rev. A.* – 2007. – Vol. 76. – P. 033806.
- [10] M.M. Wolf, D. Perez-Garcia, G. Giedke. Quantum Capacities of Bosonic Channel // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 99. – P. 130501.
- [11] N. Sangouard, C. Simon, H. de Riedmatten, and N. Gisin. Quantum repeaters based on atomic ensembles and linear optics // *Rev. Mod. Phys.* – 2011. – Vol.83. – P. 33.

- [12] C. Simon et al. Quantum memories // *Eur. Phys. J. D.* – 2010. – Vol. 58. – P. 1–22.
- [13] D.V. Vasilyev, I.V. Sokolov and E.S. Polzik. Quantum memory for images: A quantum hologram // *Phys. Rev. A.* – 2008. – Vol. 77. – P. 020302(R).
- [14] M.J. Collett and C.W. Gardiner. Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification // *Phys. Rev. A.* – 1984. – Vol. 30. – P. 1386–1391.
- [15] C.W. Gardiner and C.M. Savage. A multimode quantum theory of a degenerate parametric amplifier in a cavity // *Opt. Commun.* – 1984. – Vol. 50. – P. 173–178.
- [16] L.A. Wu, H.J. Kimble, J.L. Hall and H.Wu. Generation of squeezed states by parametric down conversion // *Phys. Rev. Lett.* – 1986. – Vol. 57. – P. 2520.
- [17] Y.M. Golubev and I.V. Sokolov. Photon antibunching in a coherent light source and suppression of the photorecording noise // *Sov. Phys. JETP.* – 1984. – Vol. 60. – P. 234.
- [18] Y. Yamamoto, S. Machida and O. Nilsson. Amplitude squeezing in a pump-noise-suppressed laser oscillator // *Phys. Rev. A.* – 1986. – Vol. 34. – P. 4025.
- [19] H.M. Wiseman and G.J. Milburn. Quantum theory of continuous feedback // *Phys. Rev. A.* – 1994. – Vol. 49. – P. 1350.
- [20] Golubev Yu., Golubeva T., Ivanov D. Broadband squeezed light from phase-locked single-mode sub-poissonian lasers // *Phys. Rev. A.* – 2008. – Vol. 77. – P. 052316.
- [21] K. Samburskaya, T. Golubeva, V. Averchenko, Y. Golubev. Quadrature Squeezing in an Isolated Pulse of Light // *Opt. Spectrosc.* – 2012. – Vol. 113(1). – P. 86–95.
- [22] J. Simon, H. Tanji, J.K. Thompson and V. Vuletic. Interfacing Collective Atomic Excitations and Single Photons // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 98. – P. 183601.
- [23] L. Veissier, A. Nicolas, L. Giner, D. Maxein, A. S. Sheremet, E. Giacobino and J. Laurat. Reversible optical memory for twisted photons // *Opt. Lett.* – 2013. – Vol. 38(5). – P. 712–714.
- [24] A. Nicolas, L. Veissier, L. Giner, E. Giacobino, D. Maxein and J. Laurat. A quantum memory for orbital angular momentum photonic qubits // *Nature Photon.* – 2014. – Vol. 8. – P. 234–238.
- [25] T. Golubeva, Yu. Golubev, O. Mishina, A. Bramati, J. Laurat, and E. Giacobino. High speed spatially multimode  $\Lambda$ -type atomic memory with arbitrary frequency detuning // *Eur. Phys. J. D.* – 2012. – Vol. 66. – P. 275.
- [26] M.I. Kolobov. The spatial behavior of nonclassical light // *Rev. Mod. Phys.* – 1999. – Vol. 71. – No. 5. – P. 1539–1589.

- [27] T. Golubeva, Yu. Golubev, O. Mishina, A. Bramati, J. Laurat and E. Giacobino. High speed spatially multimode  $\Lambda$ -type atomic memory with arbitrary frequency detuning // Eur. Phys. J. D. – 2012. – Vol. 66. – P. 275.
- [28] К.С. Тихонов. Модовый анализ квантовой памяти на холодных и теплых атомных ансамблях: Диссертация на ... канд. физ.-мат. наук // СПбГУ, Санкт-Петербург, 2015
- [29] Э.Р. Зинатуллин. Учет теплового движения в схеме многомодовой квантовой памяти: Бакалаврская выпускная квалификационная работа // СПбГУ, Санкт-Петербург, 2018
- [30] Квантовая оптика / М.О. Скайлли, М.С. Зубайри; под ред. В.В. Самарцева. – Москва: Физматлит, 2003.
- [31] Квантовое изображение / М.И. Колобов; под ред. А.С. Чиркина. – Москва: Физматлит, 2009.
- [32] Kirill Tikhonov, Tania Golubeva and Yuri Golubev. Atomic thermal motion effect on efficiency of a high-speed quantum memory // Eur. Phys. J. D. – 2015. – Vol. 69. – P. 252.
- [33] К.С. Самбурская. Параллельная квантовая память для оптических изображений на основе  $\Lambda$ -схемы атомных уровней: Диссертация на ... канд. физ.-мат. наук // СПбГУ, Санкт-Петербург, 2012
- [34] T.Yu. Golubeva and Yu.M. Golubev. Efficiency in multimode broadband resonant quantum memory // Journal of Russian Laser Research. – 2015. – Vol. 36(6). – P. 522–533.