

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»
Физический факультет

Выпускная квалификационная работа
Волчок Томсона и эффект когерентного пленения населенности в V-схеме
Уровень образования: бакалавриат
Направление: 03.03.02 "Физика"
Основная образовательная программа: СВ.5011.2017 "Физика"
Профиль: "Квантовая оптика и информатика"

Студента 4 курса, группа Б19
Сычева Дениса Анатольевича

Научный руководитель:
доцент кафедры общей физики 1,
к.ф.-м.н., Лосев Александр Сергеевич

Рецензент:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки,
Институт электрофизики и электроэнергетики,
Российской академии наук,
к.ф.-м.н., Трифанов Александр Игоревич

Санкт-Петербург
2020

Оглавление

1	Введение	3
2	Динамика волчка Томсона	4
3	Гамильтониан для волчка Томсона.	8
4	Фазовый портрет Волчка Томсона	8
5	Физика трехуровневого атома	10
6	Математическое моделирование трехуровневого атома	12
7	Функция Вигнера	14
8	Заключение	17
9	Приложение. Решение системы уравнений волновой функции методом матричной экспоненты	18

1 Введение

Физика - всеобъемлющая наука, которая разделяется на большое количество направлений. Каждое направление обладает своей предметной областью, использует специальные методы описания физических систем и методы изучения их поведения. Для каждого направления характерны свои тонкости, законы и границы их применимости. Однако часто можно найти аналогии в поведении физических систем.

В данной работе рассматривается макроскопическая механическая система - "вращающийся волчок Томсона на гладкой горизонтальной поверхности", изучаются динамические свойства и законы этой системы. В качестве возможного аналога этой системе ставится квантово-механическая система "одионый атом в переменном внешнем электромагнитном поле". Такой выбор систем обусловлен возможным нахождением обеих систем в устойчивом возбужденном состоянии.

Целями данной исследовательской работы являются

- изучение поведения вращающегося волчка Томсона - волчка, переворачивающегося относительно горизонтальной оси в процессе вращения;
- поиск квантово-механической системы с аналогичным поведением (совпадение фазового портрета волчка и функции Вигнера квантово-механической системы).

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- получение кинетических уравнений для волчка Томсона;
- получение динамических уравнений для волчка Томсона;
- получение фазового портрета волчка;
- поиск аналогичной квантово-механической системы на основе полученных знаний;
- получение уравнений, описывающих эволюцию состояния квантово-механической системы;
- построение функции Вигнера.

Работа построена следующим образом: разделы 2,3,4 посвящены описанию волчка Томсона; в 5,6,7 разделах рассмотрено взаимодействие атома, с V -конфигурацией уровней и переход, и двух классических полей. Кроме того, в приложение вынесено решение системы уравнений методом матричной экспоненты.

2 Динамика волчка Томсона

Волчок Томсона (волчок тип-топ, китайский волчок) - волчок, способный совершать переворот на 180 градусов в процессе вращения вокруг собственной оси. Особенностью поведения данной механической системы является то, что одним из устойчивых состояний является состояние, при котором потенциальная энергия системы не минимальна. В отличие от обычного волчка, волчок тип-топ обладает следующими свойствами:

- в процессе вращения точка касания меняет свое положение;
- при перевороте меняется направление вращения на противоположное;
- центр тяжести поднимается/опускается.

Такой волчок состоит из усеченного шара и стержня. Обратимся к рисунку ниже и введем некоторые условия:

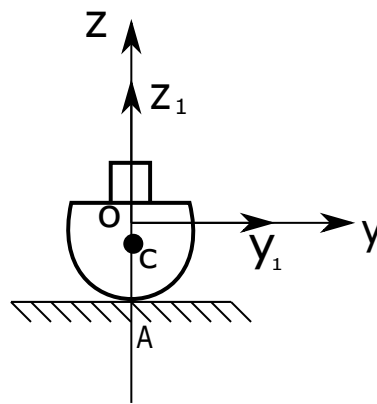


Рис. 1: Волчок Томсона.

- пусть центром неподвижной системы координат OXY является точка O , являющаяся геометрическим центром шарика (центром кривизны сферической наружной поверхности).
- пусть $OX_1Y_1Z_1$ - подвижная система координат. Ось OZ_1 всегда жестко связана (совпадает) с прямой, проведенной через точки O и C . Точка C – это центр тяжести волчка, который в начальный момент расположен ниже центра кривизны опорной поверхности - точки O . Ось OY_1 всегда находится в плоскости действия векторов внешних сил – силы тяжести G , силы инерции F и силы реакции опоры P .
- пусть волчок в состоянии покоя находится в устойчивом положении, касаясь опорной поверхности точкой A .

Задаем волчку циклическую скорость относительно оси OZ . Для изучения динамики вращения волчка Томсона для системы, изображенной на рисунке выше, вводится кратковременное действие сторонней силы, которая может быть вызвана шероховатостью поверхности. Эта сила приведет к смещению точки C приведет к возникновению центробежной силы F :

$$F = am = \omega_0^2 mr, \quad (1)$$

где r - расстояние смещения точки C относительно OZ .

Возникшая сила F и вес тела G вместе создадут момент сил:

$$M = Fp - Gr, \quad (2)$$

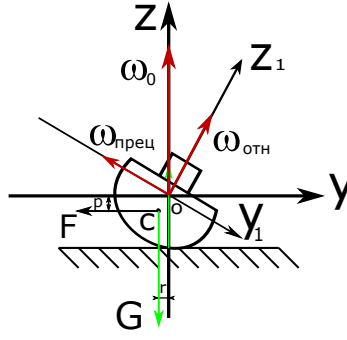


Рис. 2: Отклонение центра масс вследствие кратковременной флуктуации.

где

$$M_g = -Gr, \quad (3)$$

момент силы тяжести G относительно оси OZ ,

$$M_f = Fp, \quad (4)$$

момент центробежной силы F относительно оси OY .

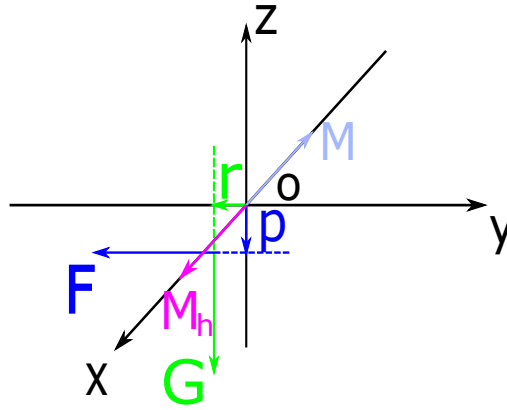


Рис. 3: Гироскопический момент.

Возникновение момента сторонних сил вызывает прецессию волчка и создает гироскопический момент M_h , который старается уравновесить действие момента M , который появился в результате векторной суммы момента центробежной силы и веса волчка Томсона. Это означает, что волчок начинает вращение вокруг оси OY .

$$M_h = L_{otn}\omega_{per} = mr^2\omega_{otn}\omega_{per} = M. \quad (5)$$

Тогда скорость прецессии определяется по формуле:

$$\omega_{prec} = M/L_{otn} = mr(\omega_0^2 p - g)/(mr^2\omega_{otn}). \quad (6)$$

Теперь представим себе идеальную модель, когда при запуске волчка отсутствуют какие-либо силы. Тогда волчок будет вращаться с постоянной скоростью ω_0 , направленной вдоль неподвижной оси OZ . Тогда справедливо следующее утверждение для кинетических моментов:

$$L_0 = \sqrt{L_y^2 + L_z^2} = const, \quad (7)$$

где

$$L_y = I_y \omega_{prec}; \quad (8)$$

$$L_0 = I_0 \omega_0; \quad (9)$$

$$L_z = I_z \omega_{otn}, \quad (10)$$

тогда

$$L_0 = \sqrt{(I_y \omega_{prec})^2 + (I_z \omega_{otn})^2} = const. \quad (11)$$

Из этого утверждения можно сделать следующий вывод: чем сильнее волчок отклоняется от вертикальной неподвижной оси OZ , тем меньше скорость его собственных вращений и тем больше скорость прецессии. Тогда в момент времени, когда OZ и OZ_1 взаимно перпендикулярны, скорость собственных вращений равна 0:

$$\omega_0 = \omega_{prec}; \quad \omega_{otn} = 0, \quad (12)$$

то есть, волчок перестает вращаться вокруг своей оси, а скорость прецессии максимальна.

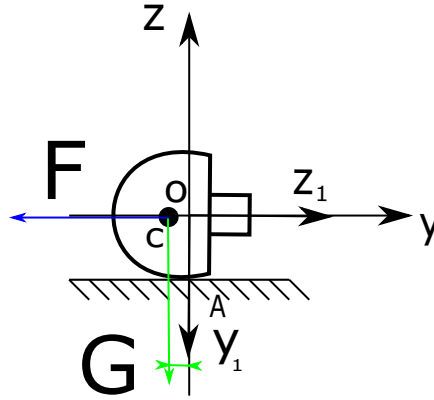


Рис. 4: Скорость собственных вращений - нулевая, а скорость прецессии максимальна.

Далее аналогично начальному вращению, во время прецессии волчок вновь отклонится от оси OY . Момент вектора F в текущий момент времени сонаправится с моментом силы тяжести и, соответственно, суммарный момент изменит свое направление на противоположное. По закону сохранения моментов, гироскопический момент так же изменит свое направление. Волчок начнет вращение в сторону, противоположную начальному направлению.

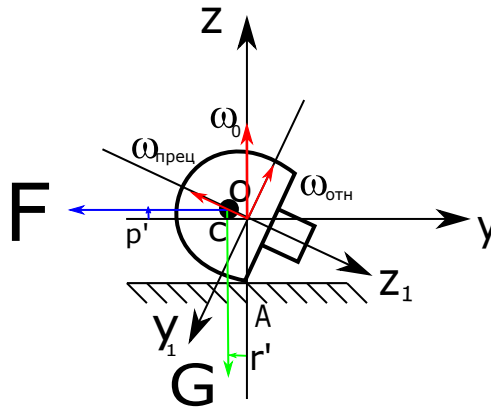


Рис. 5: Процесс переворота волчка Томсона на ножку.

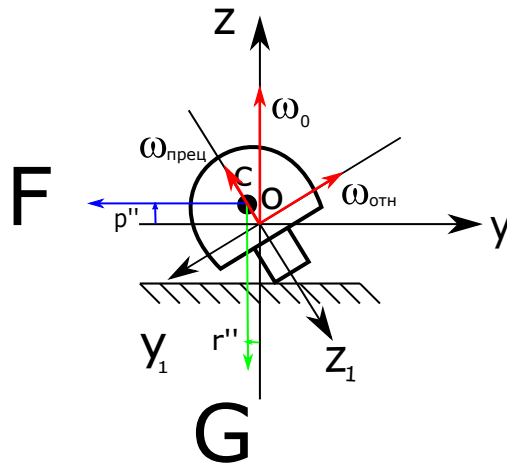


Рис. 6: Процесс переворота волчка Томсона на ножку.

Центр тяжести продолжит движение вверх, и будет подниматься, пока точка C не совместится с точкой на оси OZ . Как только это произойдет, волчок займет устойчивое положение на ножке и продолжит вращение до тех пор, пока момент импульса L_0 не станет равен 0 (при наличии диссипативных сил) или бесконечно долго (при идеальной системе).

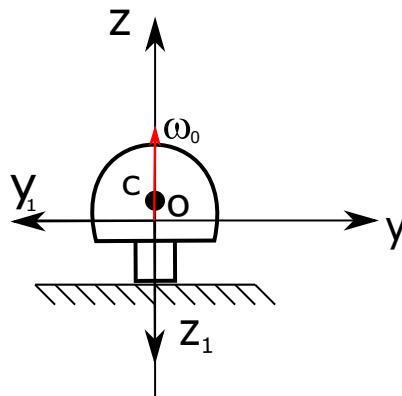


Рис. 7: Устойчивое возбужденное состояние волчка Томсона

Направление переворота волчка напрямую зависит от суммарного момента, возникаемого при отклонении центра масс в результате флуктуаций. Рассмотрим подробнее равенство:

$$\vec{M} = m\vec{r}(\omega_0^2\vec{p} + \vec{g}), \quad (13)$$

где \vec{M} - суммарный момент, $m\vec{r}\omega_0^2\vec{p}$ - момент центробежной силы, направленный вдоль оси OX и сонаправленный с этой осью, $m\vec{r}\vec{g}$ - момент силы тяжести, который, в нашем случае, противоположно направлен относительно момента силы тяжести. Тогда направление движения можно определить, сравнив две величины: $p\omega^2$ и g .

Пусть h расстояние от геометрического центра до центра масс. Тогда $h\cos\theta = p$. Ввиду малости угла θ принимаем $\cos\theta = 1$. Тогда сравним $h\omega^2$ и g . Если $g > h\omega$, то суммарный момент сонаправлен с осью OX и волчок будет стремиться вернуться в начальное положение. Если же $g < h\omega$, то волчок будет переворачиваться в сторону начального отклонения от положения устойчивого равновесия.

Особенностью данной системы является то, что конечное положение волчка, при отсутствии внешних сил, является устойчивым, хотя, физически, все тела стремятся к минимуму своей потенциальной энергии и именно это состояние является для них устойчивым.

3 Гамильтониан для волчка Томсона.

Для начала определим лагранжиан волчка Томсона, а далее, с помощью формул найдем Гамильтониан нашей системы. Введем функцию $f(\theta)$, характеризующую расстояние от центра тяжести волчка до плоскости OXY - неподвижной. Согласно второму закону Ньютона:

$ma = N - mg$; где $a = \ddot{f}$, $m = 1$ (для простоты) тогда $m\ddot{f} = N - mg$, откуда $N = g + \ddot{f}$ Тогда $N = g + \ddot{f}(\theta)\dot{\theta}^2 + \dot{f}(\theta)\ddot{\theta}$. Пусть A, C - моменты инерции тела. Тогда составим Лагранжиан [1]:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (A + f'^2)(\dot{\theta})^2 + A(\dot{\psi})^2 \sin^2\theta + C(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2) - gf. \quad (14)$$

Теперь, зная функцию Лагранжа, составим следующие уравнения:

$$\dot{x} = p_x;$$

$$\dot{y} = p_y;$$

$$C(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta) = p_2;$$

$$A(\dot{\psi})\sin^2\theta + C(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta = p_1.$$

Возьмем для удобства $p_x = p_y = 0$ [1]. Тогда Гамильтониан системы выглядит следующим образом:

$$H = \frac{1}{2}(A + f'^2)\dot{\theta}^2 + gf + \frac{p_2^2}{2C} + \frac{(p_1 - p_2\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}. \quad (15)$$

4 Фазовый портрет Волчка Томсона

В ходе работы были построены фазовые портреты движения точек волчка. Известно, что положение всех точек - поверхность сфер. Рассмотрим одну из возможных траекторий вращения

Волчка Томсона. Введем сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x = r \cos \psi \sin \theta, \\ y = r \sin \psi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (16)$$

Пусть

$$r = 1, \varphi(t) = t, \psi(t) = t, \theta(t) = t, \quad (17)$$

тогда:

$$\begin{cases} x = \cos t \sin t, \\ y = \sin t \sin t, \\ z = \cos t. \end{cases} \quad (18)$$

Результаты построения графиков представлены на рисунке ниже.

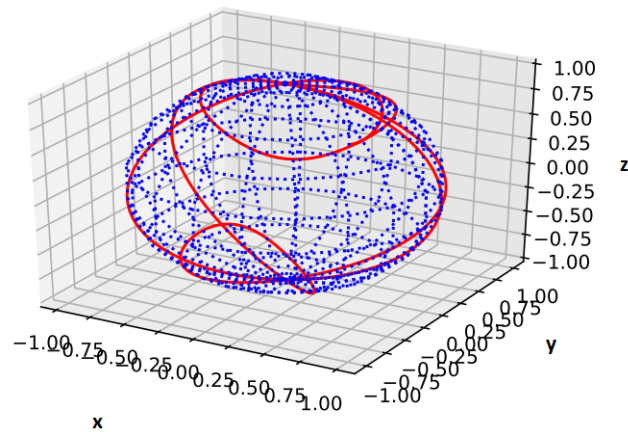


Рис. 8: Трёхмерный график возможной конфигурации движения центра масс Волчка Томсона.

Волчок Томсона подчиняется законам вращения обычного волчка до момента начала подъема на ножку. После того, как китайский волчок поднялся на ножку, прецессия и нутация прекращаются, поскольку волчок принимает своё устойчивое положение и, в силу выполнения законов сохранения величин системы, осцилляции прекращаются.

5 Физика трехуровневого атома

Рассматривается резонансное взаимодействие двух классических полей и атома с V-конфигурацией атомных уровней и переходов (Рис.9) Предполагается, что дипольно разрешены переходы с

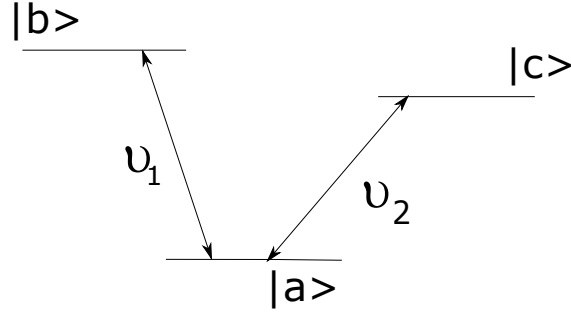


Рис. 9: Схема атомных уровней и переходов в V-схеме.

уровня $|a\rangle$ на уровень $|b\rangle$ и с уровня $|a\rangle$ на уровень $|c\rangle$. Для такой системы гамильтониан, в дипольном приближении и с учетом приближения вращающейся волны выглядит следующим образом: $H = H_0 + H_1$ Невозмущенный гамильтониан поля H_0 :

$$H_0 = h\omega_a |a\rangle \langle a| + h\omega_b |b\rangle \langle b| + h\omega_c |c\rangle \langle c| \quad (19)$$

Гамильтониан взаимодействия поля с атомом H_1 [2]:

$$H_1 = -\frac{\hbar}{2} (\Omega_{R1} e^{-i\Phi_1} e^{-i\nu_1 t} |a\rangle \langle b| + \Omega_{R2} e^{-i\Phi_2} e^{-i\nu_2 t} |a\rangle \langle c| + h.c.) \quad (20)$$

Волновая функция описывается уравнением:

$$|\psi(t)\rangle = C_a(t) |a\rangle + C_b(t) |b\rangle + C_c(t) |c\rangle. \quad (21)$$

Коэффициенты C_a , C_b , C_c для уравнения описываются, используя представление медленно изменяющихся амплитуд (в выражениях пренебрегается членами, которые пропорциональны $e^{\pm i(\omega+\nu t)}$) [3], следующим образом:

$$C_a = c_a e^{-i\omega_a t}, \quad (22)$$

$$C_b = c_b e^{-i\omega_b t}, \quad (23)$$

$$C_c = c_c e^{-i\omega_c t}. \quad (24)$$

Подставляя данное выражение в уравнение Шредингера можно вывести систему уравнений для производных коэффициентов c_a, c_b, c_c , которая выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{c}_a = \frac{i}{2} (\Omega_1 e^{-i\Phi_1} c_b + \Omega_2 e^{-i\Phi_2} c_c) \\ \dot{c}_b = \frac{i}{2} \Omega_1 e^{i\Phi_1} c_a \\ \dot{c}_c = \frac{i}{2} \Omega_2 e^{i\Phi_2} c_a. \end{cases} \quad (25)$$

Для решения полученной системы уравнений воспользуемся методом матричной экспоненты. Тогда решение системы в матричном виде:

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} \frac{i \sin \frac{\Omega t}{2}}{\Omega} (\Omega_1 e^{-i\Phi_1} \cos \frac{\theta}{2} + \Omega_2 e^{-i(\Phi_2 + \Psi)} \sin \frac{\theta}{2}) \\ \frac{1}{\Omega^2} ((\Omega_2^2 + (\Omega_1^2 \cos \frac{\Omega t}{2}) \cos \frac{\theta}{2} - 2\Omega_1 \Omega_2 e^{-i\Phi_1 - \Phi_2 - \Psi} \sin^2 \frac{\Omega t}{4} \sin \frac{\theta}{2}) \\ \frac{1}{\Omega^2} ((\Omega_1^2 + (\Omega_2^2 \cos \frac{\Omega t}{2}) e^{-i\Psi} \sin \frac{\theta}{2} - 2\Omega_1 \Omega_2 e^{-i\Phi_1 - \Phi_2} \sin^2 \frac{\Omega t}{4} \cos \frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим явление когерентного пленения – такое состояние, когда атом находится в суперпозиции состояний $|b\rangle$ и $|c\rangle$. Для этого должны выполняться условия: $\Omega_1 = \Omega_2$, $\theta = \pi/2$, $\Phi_1 - \Phi_2 - \psi = \pm\pi$ [2]. Тогда

$$c_a(t) = \frac{i}{\Omega} (\Omega_1 e^{-i\Phi_1} \cos \frac{\theta}{2} + \Omega_2 e^{-i\Phi_2} \sin \frac{\theta}{2}) \sin \frac{\Omega t}{2}. \quad (26)$$

Коэффициенты для c_b и c_c :

$$c_b = \frac{1}{\Omega^2} ((\Omega_2^2 + \Omega_1^2 \cos \frac{\Omega t}{2}) \cos \frac{\theta}{2} - 2\Omega_1 \Omega_2 e^{-i(\Phi_1 - \Phi_2 - \psi)} \sin^2 \frac{\Omega t}{4} \sin \frac{\theta}{2}) \quad (27)$$

$$c_c = \frac{1}{\Omega^2} ((\Omega_2^2 + \Omega_1^2 \cos \frac{\Omega t}{2}) e^{-i\psi} \sin \frac{\theta}{2} - 2\Omega_1 \Omega_2 e^{-i(\Phi_1 - \Phi_2)} \sin^2 \frac{\Omega t}{4} \cos \frac{\theta}{2}). \quad (28)$$

Тогда с этими условиями:

$$c_a = \frac{i \sin \frac{\Omega t}{2}}{\Omega} e^{-i\Phi_1} (\Omega_1 \cos \frac{\pi}{4} - \Omega_1 \sin \frac{\pi}{4}) = 0.$$

Далее необходимо рассмотреть, какие выражения получатся в выражениях для c_b и c_c при подстановке введённых предположений.

Для c_b :

$$c_b = \frac{1}{\Omega^2} ((\Omega_1^2 (\cos \frac{\Omega t}{2} + 1) \cos \frac{\pi}{4} + 2\Omega_1^2 \sin^2 \frac{\Omega t}{4} \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\Omega_1^2} (2\Omega_1^2 \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Для c_c :

$$c_c = \frac{1}{\Omega^2} ((\Omega_1^2 + (\Omega_2^2 \cos \frac{\Omega t}{2}) e^{-i\psi} \sin \frac{\theta}{2} - 2\Omega_1 \Omega_2 e^{-i\Phi_1 - \Phi_2} \sin^2 \frac{\Omega t}{4} \cos \frac{\theta}{2}) = \frac{2}{\Omega_1^2} e^{-i\psi} (2\Omega_1^2 \cos \frac{\theta}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\psi}.$$

Таким образом, для нашей системы условия нахождения атома в так называемом ”темном состоянии” выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \Omega_1 = \Omega_2 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \\ \Phi_1 - \Phi_2 - \psi = \pm\pi \end{cases}.$$

При этих условиях атом будет бесконечно долго находиться в возбужденном состоянии при постоянном резонансном взаимодействии с двумя полями. Следовательно, аналог в квантово-механической системе для волчка Томсона найден.

6 Математическое моделирование трехуровневого атома

Далее составим математическую модель и исследуем её при помощи численного решения системы (26), используя метод Эйлера. Введем зависимость полей от времени и изучим эволюцию изменения вероятности нахождения атома на различных уровнях, при разных конфигурациях полей. При разных конфигурациях полей, атом ведет себя по-разному:

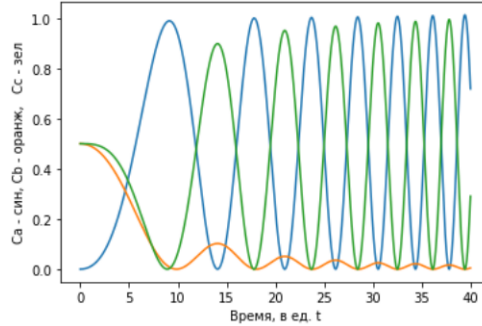


Рис. 10: График изменения вероятностей при $c_{a0} = 0$, $c_{b0} = c_{c0} = 1/\sqrt{2}$, поля экспоненциально затухающие.

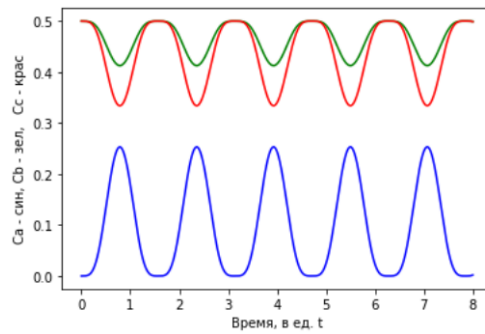


Рис. 11: График изменения вероятностей при $c_{a0} = 0$, $c_{b0} = c_{c0} = 1/\sqrt{2}$, поля синусоидальные.

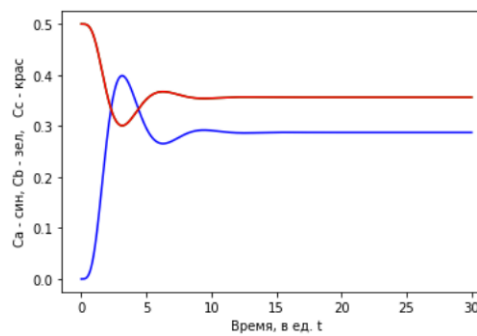


Рис. 12: График изменения вероятностей при $c_{a0} = 0$, $c_{b0} = c_{c0} = 1/\sqrt{2}$, поля периодические и экспоненциально затухающие.

Наша задача перевести атом из начального состояния $|a\rangle$ в состояние суперпозиции уровней $|b\rangle$ и $|c\rangle$ путем изменения характеристик полей. То есть: $c_{a0} = 1$, $c_{b0} = 0$, $c_{c0} = 0$, $E_1 = E_{10} * E_1(t)$, $E_2 = E_{20} * E_2(t)$. Рассмотрим $E_1(t) = \sin 3te^{-0.1t} = E_2(t)$. Численно моделируя систему (26) с этими условиями рассмотрим эволюцию вероятности нахождения атома на разных уровнях:

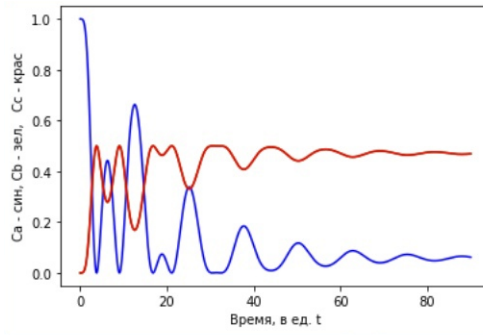


Рис. 13: График изменения вероятностей при $c_{a0} = 1$, $c_{b0} = c_{c0} = 0$, $E_1(t) = \sqrt{\sin 0.5t} e^{-0.1t} = E_2(t)$.

Из графика (Рис.13) видно, что вероятность нахождения атома на уровне $|a\rangle$ экспоненциально спадает и стремится к 0, в то время как вероятность обнаружения атома в состоянии суперпозиции уровней $|b\rangle$ и $|c\rangle$.

7 Функция Вигнера

Функция Вигнера - квазивероятностная функция распределения, её нельзя назвать функцией распределения вероятностей, поскольку она может принимать отрицательные значения [4]. Отрицательные значения соответствуют некоторым квантовым состояниям, которые не имеют аналогов в классической механике.

Функция Вигнера дает правильные вероятности для одной переменной при интегрировании по другой переменной [4]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x, p) dp = |\Psi(x)|^2 \quad (29)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x, p) dx = \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x) dx \right|^2 \quad (30)$$

Функции Вигнера соединяются друг с другом при помощи звездочного произведения [5], которое в дифференциальной форме выражается как:

$$\star = e^{\frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_x \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_x)}. \quad (31)$$

Произведение функций с учетом оператора $e^{a\partial_x} \star h(x) = h(x+a)$:

$$f(x, p) \star g(x, p) = f(x, p - \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_x) g(x, p - \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_x) = f(x + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_x, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_x) g(x, p) \quad (32)$$

Гамильтониан для гармонического осциллятора

$$H = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m}. \quad (33)$$

Уравнение на собственные \star -значения ищутся по формуле $H \star W = EW$ [4]. Для гармонического осциллятора собственные \star -значения:

$$H \star W = \left(\frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m} \right) \star W. \quad (34)$$

С учетом выражения на \star -представление:

$$H \star W = \left(\frac{1}{2} m \omega^2 \left(x + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p \right)^2 + \frac{(p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_x)^2}{2m} \right) W. \quad (35)$$

Далее необходимо раскрыть скобки и разделить выражение на мнимую и действительную части:

$$H \star W = \left(\frac{1}{2} m \omega^2 \left(x^2 - \frac{\hbar^2}{4} \overrightarrow{\partial}_p^2 \right) + \frac{(p^2 - \frac{\hbar^2}{4} \overrightarrow{\partial}_x^2)}{2m} \right) W + \frac{i\hbar}{2} \left(m \omega^2 x \overrightarrow{\partial}_p - \frac{p}{m} \overrightarrow{\partial}_x \right) W. \quad (36)$$

Тогда уравнение $H \star W = EW$ можно так же разделить на 2 части: мнимую и действительную:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} m \omega^2 \left(x^2 - \frac{\hbar^2}{4} \overrightarrow{\partial}_p^2 \right) + \frac{(p^2 - \frac{\hbar^2}{4} \overrightarrow{\partial}_x^2)}{2m} \right) W = EW, \\ \frac{i\hbar}{2} \left(m \omega^2 x \overrightarrow{\partial}_p - \frac{p}{m} \overrightarrow{\partial}_x \right) W = 0. \end{cases} \quad (37)$$

Рассмотрим уравнение для мнимой части:

$$\frac{i\hbar}{2}(m\omega^2x\vec{\partial}_p - \frac{p}{m}\vec{\partial}_x)W = 0. \quad (38)$$

Анализ вида уравнение позволяет сделать предположение о том, что функция Вигнера - функция зависящая только от одной переменной - гамильтониана: $W = F(\frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{p^2}{2m}) = F(u)$. Используя такую замену переменных, действительная часть уравнения упрощается к:

$$(u - \frac{u\partial_u^2}{4} - \frac{\partial_u}{4})W = EW. \quad (39)$$

Решения этого уравнения включают в себя полиномы Лагерра [5].

Вид решения: $F_n = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} L_n(4\frac{u}{\omega\hbar})e^{-2u/\omega\hbar}$, где $L_0 = 1$, $L_1 = -4\frac{u}{\omega\hbar} + 1$, $L_2 = \frac{1}{2}((4\frac{u}{\omega\hbar})^2 - 4(4\frac{u}{\omega\hbar}) + 2)$. Эти решения соответствуют собственным значениям $E = \omega\hbar(n + \frac{1}{2})$.

Рассмотрим $n = 0, 1, 2$. Для этих чисел n функции Вигнера имеют вид:

$$F_0 = \frac{1}{\pi}e^{-4(p^2+x^2)}, \quad (40)$$

$$F_1 = \frac{1}{\pi}(2p^2 + 2x^2 - 1)e^{-4(p^2+x^2)}, \quad (41)$$

$$F_2 = \frac{1}{\pi}(2(p^2 + x^2)^2 - 4(p^2 + x^2) + 1)e^{-4(p^2+x^2)}. \quad (42)$$

Графически, распределение функции Вигнера для разных состояний изображены на рисунках 14-16

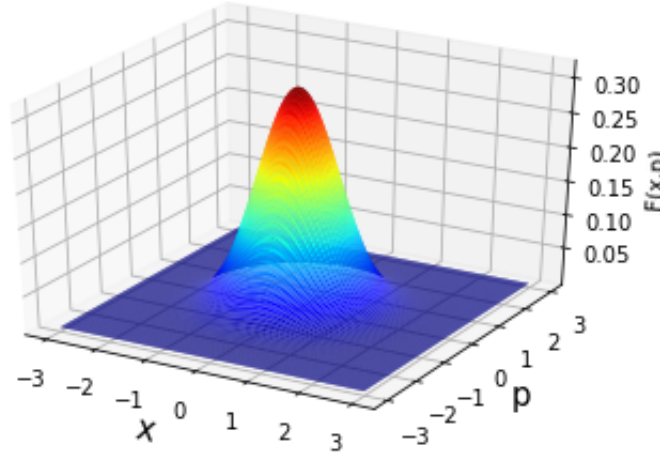


Рис. 14: Распределение функции Вигнера для 0 уровня.

Для суперпозиционного состояния волновая функция записывается в виде: $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle$. Функция Вигнера для такого состояния получается по формуле: $F = |a|^2|F_a + |b|^2|F_b$ [4], т.е. $F_{12} = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}(2p^2 + 2x^2 - 1)e^{-4(p^2+x^2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}(2(p^2 + x^2)^2 - 4(p^2 + x^2) + 1)e^{-4(p^2+x^2)}$. Тогда график распределения выглядит так, как изображена на рисунке 17:

Проанализировав полученные графики, можно сделать вывод о том, что распределение функции Вигнера неотрицательно везде, кроме окрестностей малого радиуса вблизи нуля. Это говорит о том, что в рамках классической теории, вероятность нахождения системы на ненулевом уровне, при малых значениях x и p в рамках классической теории, равняется 0. В остальных случаях распределение соответствует и классической физике.

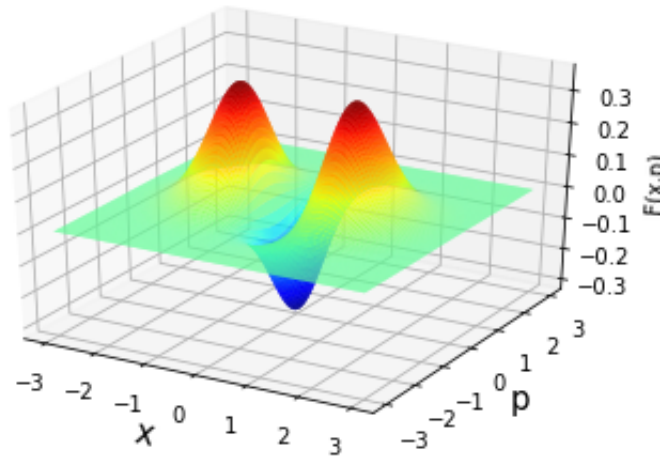


Рис. 15: Распределение функции Вигнера для 1 уровня.

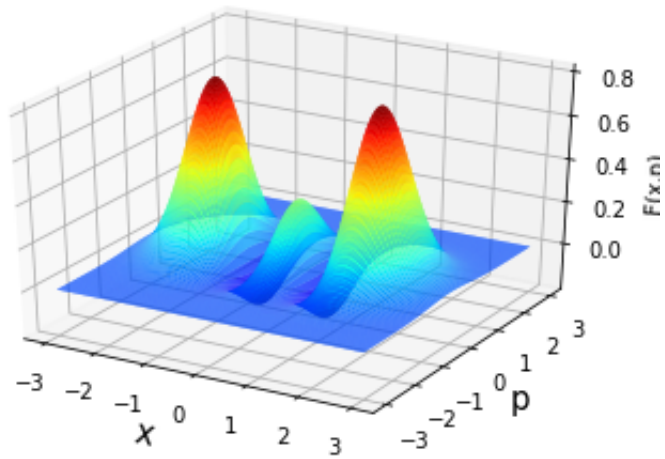


Рис. 16: Распределение функции Вигнера для 2 уровня.

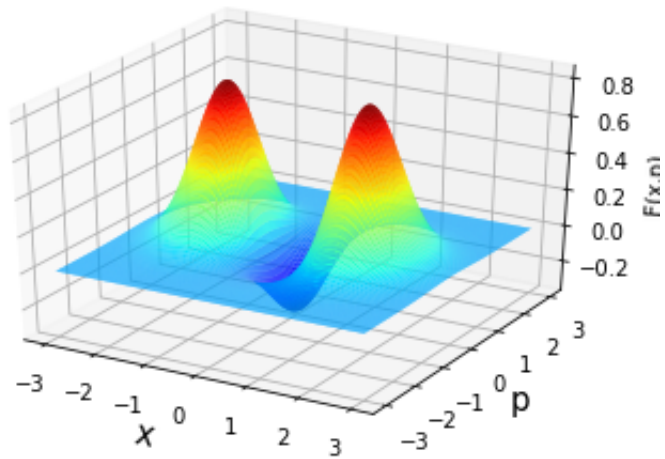


Рис. 17: Распределение функции Вигнера для суперпозиции уровней b и c.

8 Заключение

В данной работе на основе материалов, имеющихся в открытом доступе, была изучена физика вращающегося волчка. Получены кинематические и динамические уравнения Эйлера, были получены выражения для гамильтониана волчка Томсона. Была изучена квантово-механическая система – одиночный атом в переменном внешнем электромагнитном поле. Получены основные уравнения амплитуд вероятности для V -конфигурации, функции Вигнера для каждого энергетического уровня. Был рассмотрен случай нахождения атома в состоянии, соответствующем суперпозиции двух энергетических уровней. Построена функция Вигнера для этого состояния системы. На основании полученных результатов, можно сделать вывод о том, что рассмотренные системы могут быть рассмотрены, как аналогичные, так как и для волчка Томсона, и для атома V -конфигурации возможно устойчивое возбужденное состояние.

9 Приложение. Решение системы уравнений волновой функции методом матричной экспоненты

Рассмотрим уравнение Шредингера:

$$|\dot{\Psi}(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|\Psi(t)\rangle, \quad (43)$$

где $H = H_0 + H_1$ Невозмущенный гамильтониан поля H_0 :

$$H_0 = \hbar\omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b| + \hbar\omega_c |c\rangle\langle c| \quad (44)$$

Гамильтониан взаимодействия поля с атомом H_1 :

$$H_1 = -\frac{\hbar}{2}(\Omega_{R1}e^{-i\Phi_1}e^{-i\nu_1 t}|a\rangle\langle b| + \Omega_{R2}e^{-i\Phi_2}e^{-i\nu_2 t}|a\rangle\langle c| + h.c.) \quad (45)$$

Волновая функция описывается уравнением:

$$|\Psi(t)\rangle = C_a(t)|a\rangle + C_b(t)|b\rangle + C_c(t)|c\rangle. \quad (46)$$

Коэффициенты C_a, C_b, C_c для уравнения описываются, используя представление медленно изменяющихся амплитуд, следующим образом:

$$C_a = c_a e^{-i\omega_a t}, \quad (47)$$

$$C_b = c_b e^{-i\omega_b t}, \quad (48)$$

$$C_c = c_c e^{-i\omega_c t}. \quad (49)$$

Подставляя данное выражение в уравнение Шредингера можно вывести систему уравнений для производных коэффициентов c_a, c_b, c_c , которая выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{c}_a = \frac{i}{2}(\Omega_1 e^{-i\Phi_1} c_b + \Omega_2 e^{-i\Phi_2} c_c) \\ \dot{c}_b = \frac{i}{2}\Omega_1 e^{i\Phi_1} c_a \\ \dot{c}_c = \frac{i}{2}\Omega_2 e^{i\Phi_2} c_a. \end{cases} \quad (50)$$

Для решения полученной системы уравнений воспользуемся методом матричной экспоненты. Для этого запишем матрицу коэффициентов A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}\Omega_1 e^{-i\Phi_1} & \frac{i}{2}\Omega_2 e^{-i\Phi_2} \\ \frac{i}{2}\Omega_1 e^{i\Phi_1} & 0 & 0 \\ \frac{i}{2}\Omega_2 e^{i\Phi_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа матрицы A :

$$(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{i}{2}\Omega_1 e^{-i\Phi_1} & \frac{i}{2}\Omega_2 e^{-i\Phi_2} \\ \frac{i}{2}\Omega_1 e^{i\Phi_1} & -\lambda & 0 \\ \frac{i}{2}\Omega_2 e^{i\Phi_2} & 0 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Характеристический полином имеет вид:

$$-\lambda^3 - \Omega_1^2 \frac{\lambda}{4} - \Omega_2^2 \frac{\lambda}{4} = 0. \quad (51)$$

Тогда собственные числа:

$$\lambda_1 = 0; \lambda_{2,3} = \pm \frac{i\Omega}{2}. \quad (52)$$

Далее необходимо найти собственные вектора, соответствующие каждому собственному числу.

Для $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}\Omega_1 e^{-i\Phi_1} & \frac{i}{2}\Omega_2 e^{-i\Phi_2} \\ \frac{i}{2}\Omega_1 e^{i\Phi_1} & 0 & 0 \\ \frac{i}{2}\Omega_2 e^{i\Phi_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = 0.$$

Откуда собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 0$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -\frac{\Omega_1}{\Omega_2} t e^{-i(\Phi_1 - \Phi_2)} \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2 = \frac{i\Omega}{2}$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{i\Omega}{2} & \frac{i}{2}\Omega_1 e^{-i\Phi_1} & \frac{i}{2}\Omega_2 e^{-i\Phi_2} \\ \frac{i}{2}\Omega_1 e^{i\Phi_1} & -\frac{i\Omega}{2} & 0 \\ \frac{i}{2}\Omega_2 e^{i\Phi_2} & 0 & -\frac{i\Omega}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix} = 0,$$

тогда собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = \frac{i\Omega}{2}$:

$$V_2 = \begin{pmatrix} t \\ \frac{\Omega_1}{\Omega} t e^{i\Phi_1} \\ \frac{\Omega_2}{\Omega} t e^{i\Phi_2} \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_3 = -\frac{i\Omega}{2}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{i\Omega}{2} & \frac{i}{2}\Omega_1 e^{-i\Phi_1} & \frac{i}{2}\Omega_2 e^{-i\Phi_2} \\ \frac{i}{2}\Omega_1 e^{i\Phi_1} & \frac{i\Omega}{2} & 0 \\ \frac{i}{2}\Omega_2 e^{i\Phi_2} & 0 & \frac{i\Omega}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_3 = -\frac{i\Omega}{2}$:

$$V_3 = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{\Omega_1}{\Omega} t e^{i\Phi_1} \\ -\frac{\Omega_2}{\Omega} t e^{i\Phi_2} \end{pmatrix}.$$

Матрица J , отображающая жорданову форму для собственных чисел матрицы A :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i\Omega}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i\Omega}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрица линейного преобразования H образуется с помощью собственных векторов матрицы A :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\Omega_1}{\Omega} e^{i\Phi_1} & -\frac{\Omega_1}{\Omega} e^{i\Phi_1} \\ -\frac{\Omega_1}{\Omega_2} e^{-i(\Phi_1 - \Phi_2)} & \frac{\Omega_2}{\Omega} e^{i\Phi_2} & -\frac{\Omega_2}{\Omega} e^{i\Phi_2} \end{pmatrix}$$

Найдем H^{-1} . Для начала необходимо посчитать определитель ΔH :

$$\det H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\Omega_1}{\Omega} e^{i\Phi_1} & -\frac{\Omega_1}{\Omega} e^{i\Phi_1} \\ -\frac{\Omega_1}{\Omega_2} e^{-i(\Phi_1 - \Phi_2)} & \frac{\Omega_2}{\Omega} e^{i\Phi_2} & -\frac{\Omega_2}{\Omega} e^{i\Phi_2} \end{vmatrix} = -\left(-\frac{\Omega_2}{\Omega} e^{i\Phi_2} - \frac{\Omega_1^2}{\Omega\Omega_2} e^{i\Phi_2}\right) + \frac{\Omega_2}{\Omega} e^{i\Phi_2} + \frac{\Omega_1^2}{\Omega\Omega_2} e^{i\Phi_2} = \frac{2e^{i\Phi_2}\Omega}{\Omega_2}$$

Алгебраические дополнения H_{ij} :

$$H_{11} = 0 \quad (53)$$

$$H_{12} = \frac{\Omega}{\Omega_2} e^{i\Phi_2} \quad (54)$$

$$H_{13} = \frac{\Omega}{\Omega_2} e^{i\Phi_2} \quad (55)$$

$$H_{21} = 2 \frac{\Omega_2}{\Omega} e^{i\Phi_2} \quad (56)$$

$$H_{22} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} e^{-(i\Phi_1 - i\Phi_2)} \quad (57)$$

$$H_{23} = -\frac{\Omega_1}{\Omega_2} e^{-(i\Phi_1 - i\Phi_2)} \quad (58)$$

$$H_{31} = -2 \frac{\Omega_1}{\Omega} e^{i\Phi_1} \quad (59)$$

$$H_{32} = 1 \quad (60)$$

$$H_{33} = -1 \quad (61)$$

Тогда H^{-1} :

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2} & -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega^2} e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)} \\ \frac{1}{2} & \frac{\Omega_1}{\Omega} e^{-i\Phi_1} & \frac{\Omega_2}{2\Omega} e^{-i\Phi_2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\Omega_1}{\Omega} e^{-i\Phi_1} & -\frac{\Omega_2}{2\Omega} e^{-i\Phi_2} \end{pmatrix}.$$

Теперь, зная H , H^{-1} , J , найдем матрицу A , с помощью которой мы получим ответ, по формуле:

$$e^{tA} = H e^{eJ} H^{-1} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\Omega_1}{\Omega} e^{i\Phi_1} & -\frac{\Omega_1}{\Omega} e^{i\Phi_1} \\ -\frac{\Omega_1}{\Omega_2} e^{-i(\Phi_1 - \Phi_2)} & \frac{\Omega_2}{\Omega} e^{i\Phi_2} & -\frac{\Omega_2}{\Omega} e^{i\Phi_2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\Omega}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{i\Omega}{2}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2} & -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega^2} e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)} \\ \frac{1}{2} & \frac{\Omega_1}{\Omega} e^{-i\Phi_1} & \frac{\Omega_2}{2\Omega} e^{-i\Phi_2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\Omega_1}{\Omega} e^{-i\Phi_1} & -\frac{\Omega_2}{2\Omega} e^{-i\Phi_2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{i\Omega}{2}} & e^{-\frac{i\Omega}{2}} \\ 1 & \frac{\Omega_1}{\Omega} e^{i\Phi_1} e^{\frac{i\Omega}{2}} & -\frac{\Omega_1}{\Omega} e^{i\Phi_1} e^{-\frac{i\Omega}{2}} \\ -\frac{\Omega_1}{\Omega_2} e^{-i(\Phi_1 - \Phi_2)} & \frac{\Omega_2}{\Omega} e^{i\Phi_2} e^{\frac{i\Omega}{2}} & -\frac{\Omega_2}{\Omega} e^{i\Phi_2} e^{-\frac{i\Omega}{2}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2} & -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega^2} e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)} \\ \frac{1}{2} & \frac{\Omega_1}{\Omega} e^{-i\Phi_1} & \frac{\Omega_2}{2\Omega} e^{-i\Phi_2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\Omega_1}{\Omega} e^{-i\Phi_1} & -\frac{\Omega_2}{2\Omega} e^{-i\Phi_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для наглядности и аккуратности запишем компоненты матрицы A отдельно друг от друга:

$$A_{11} = \frac{1}{2} e^{\frac{i\Omega}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{i\Omega}{2}}, \quad (63)$$

$$A_{12} = \frac{\Omega_1}{2\Omega} e^{\frac{i\Omega}{2}} e^{-i\Phi_1} - \frac{\Omega_1}{2\Omega} e^{-\frac{i\Omega}{2}} e^{-i\Phi_1}, \quad (64)$$

$$A_{13} = \frac{\Omega_2}{2\Omega} e^{\frac{i\Omega t}{2}} e^{-i\Phi_2} - \frac{\Omega_2}{2\Omega} e^{-\frac{i\Omega t}{2}} e^{-i\Phi_2}, \quad (65)$$

$$A_{21} = \frac{\Omega_1}{2\Omega} e^{\frac{i\Omega t}{2}} e^{i\Phi_1} - \frac{\Omega_1}{2\Omega} e^{-\frac{i\Omega t}{2}} e^{i\Phi_1}, \quad (66)$$

$$A_{22} = \frac{\Omega_2^2}{2\Omega^2} + \frac{\Omega_1^2}{2\Omega^2} e^{\frac{i\Omega t}{2}} + \frac{\Omega_1^2}{2\Omega^2} e^{-\frac{i\Omega t}{2}}, \quad (67)$$

$$A_{23} = -\frac{\Omega_1\Omega_2}{\Omega^2} e^{i(\Phi_1-\Phi_2)} + \frac{\Omega_1\Omega_2}{\Omega^2} e^{i(\Phi_1-\Phi_2)} e^{-\frac{i\Omega t}{2}} + \frac{\Omega_1\Omega_2}{\Omega^2} e^{i(\Phi_1-\Phi_2)} e^{\frac{i\Omega t}{2}}, \quad (68)$$

$$A_{31} = \frac{\Omega_2}{2\Omega} e^{i\Phi_2} e^{\frac{i\Omega t}{2}} - \frac{\Omega_2}{2\Omega} e^{i\Phi_2} e^{-\frac{i\Omega t}{2}}, \quad (69)$$

$$A_{32} = -\frac{\Omega_1\Omega_2}{\Omega^2} e^{i(\Phi_1-\Phi_2)} + \frac{\Omega_1\Omega_2}{\Omega^2} e^{i(\Phi_1-\Phi_2)} e^{-\frac{i\Omega t}{2}} + \frac{\Omega_1\Omega_2}{\Omega^2} e^{i(\Phi_1-\Phi_2)} e^{\frac{i\Omega t}{2}}, \quad (70)$$

$$A_{33} = \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} + \frac{\Omega_2^2}{2\Omega^2} e^{\frac{i\Omega t}{2}} + \frac{\Omega_2^2}{2\Omega^2} e^{-\frac{i\Omega t}{2}}. \quad (71)$$

Решение уравнения методом матричной экспоненты вычисляется по формуле:

$$X = e^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Константы C_1, C_2, C_3 в данной задаче определяются начальными условиями. Тогда:

$$X = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12} \cos \frac{\theta}{2} + A_{13} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\psi} \\ A_{22} \cos \frac{\theta}{2} + A_{23} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\psi} \\ A_{32} \cos \frac{\theta}{2} + A_{33} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\psi} \end{pmatrix}.$$

Приведем уравнения (18-26) к тригонометрическим функциям:

$$A_{12} = i \frac{\Omega_1}{\Omega} e^{-i\Phi_1} \sin \frac{\Omega t}{2}, \quad (72)$$

$$A_{13} = i \frac{\Omega_2}{\Omega} e^{-i\Phi_2} \sin \frac{\Omega t}{2}, \quad (73)$$

$$A_{22} = \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2} + \frac{\Omega_1^2}{2\Omega^2} \cos \frac{\Omega t}{2}, \quad (74)$$

$$A_{23} = \frac{\Omega_1\Omega_2}{\Omega^2} e^{i(\Phi_1-\Phi_2)} (\cos \frac{\Omega t}{2} - 1), \quad (75)$$

$$A_{32} = \frac{\Omega_1\Omega_2}{\Omega^2} e^{i(\Phi_1-\Phi_2)} (\cos \frac{\Omega t}{2} - 1), \quad (76)$$

$$A_{33} = \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} + \frac{\Omega_2^2}{2\Omega^2} \cos \frac{\Omega t}{2}. \quad (77)$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} \frac{i \sin \frac{\Omega t}{2}}{\Omega} (\Omega_1 e^{-i\Phi_1} \cos \frac{\theta}{2} + \Omega_2 e^{-i(\Phi_2+\psi)} \sin \frac{\theta}{2}) \\ \frac{1}{\Omega^2} ((\Omega_2^2 + (\Omega_1^2 \cos \frac{\Omega t}{2})) \cos \frac{\theta}{2} - 2\Omega_1\Omega_2 e^{-i\Phi_1-\Phi_2-\psi} \sin^2 \frac{\Omega t}{4} \sin \frac{\theta}{2}) \\ \frac{1}{\Omega^2} ((\Omega_1^2 + (\Omega_2^2 \cos \frac{\Omega t}{2})) e^{-i\psi} \sin \frac{\theta}{2} - 2\Omega_1\Omega_2 e^{-i\Phi_1-\Phi_2} \sin^2 \frac{\Omega t}{4} \cos \frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Литература

- [1] Метод определения параметров безотрывного движения волчка на гладкой плоскости Г. М. Розенблат // Нелинейная динамика, 2008, Т. 4, №1, с. 87-98;
- [2] Zubairy, M.S.; Scully, M.O. Quantum Optics, 1997;
- [3] Eberly, J.H. Transmission of dressed fields in three-level media // 1995 Quantum Semiclass. Opt. 7 373;
- [4] А.Ю. Хренников. Неколмогоровские теории вероятностей и квантовая физика, 2003.
- [5] Curtright, T.; Fairlie, D.; Zachos, C. Features of time-independent Wigner functions // Physical Review D : journal. — 1998. — Vol. 58, no. 2;
- [6] Groenewold H.J. On the Principles of Elementary Quantum Mechanics, 1946;
- [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том1. Механика; 1965
- [8] Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Механика, 1979;