

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи



Васильев Денис Владимирович

**Пространственно многомодовая квантовая
память для оптических изображений**

Специальность: 01.04.05 – оптика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., профессор

Соколов Иван Вадимович

Содержание

Введение	4
Обзор литературы	12
1. Квантовая память	16
2. Границы классической и квантовой памяти	23
Глава 1. Взаимодействие многомодового света с ансамблем поляризованных атомов	26
1.1. Распространение и дифракция света в свободном пространстве	26
1.2. Эффективный гамильтониан и уравнение распространения . .	28
1.3. Решение уравнений эволюции	32
Глава 2. Тонкая квантовая голограмма	36
2.1. Развитие полевых и атомных переменных	37
2.2. Верность записи – считывания без использования сжатых состояний	41
2.3. Оптимизация верности квантовой памяти	48
Глава 3. Тонкая голограмма с использованием обратной связи	57
3.1. Введение	57
3.2. Запись и считывание с использованием обратной связи	60
Глава 4. Объемная квантовая голограмма	69
4.1. Однопроходная объемная голограмма с пространственным разрешением	71
4.2. Оценки практической реализуемости	84
Заключение	87

Литература	88
Приложение А. Об эффективном гамильтониане для спиновой подсистемы и нерезонансной лазерной волны	96
Приложение Б. Пространственные флуктуации плотности атомов	101
Приложение В. Матрица корреляции усредненных квадратурных амплитуд сжатого света	103
Приложение Г. Средняя верность на пиксел	108

Введение

Актуальность работы. Данная работа посвящена теоретическому исследованию пространственно многомодовой квантовой памяти для оптических изображений. Тема данной работы принадлежит новой, недавно развившейся области физики – теории квантовой информации. Предметами ее исследования являются вопросы квантовых вычислений, квантовых компьютеров, квантовой телепортации и квантовой криптографии, проблемы декогеренции.

Квантовая память является существенной частью многих квантовых информационных протоколов, таких как квантовые повторители, распределенные квантовые вычисления, квантовые сети. В последнее время был предложен ряд подходов к проблеме квантовой памяти, основанных на использовании для хранения квантовой информации атомных ансамблей: это квантовое неразрушающее взаимодействие (QND), электромагнитно индуцированная прозрачность (EIT), рамановское взаимодействие в Λ -схемах и фотонное эхо. Современный обзор по различным реализациям квантового интерфейса можно найти в работе [1]. Многомодовая квантовая память находится в центре внимания текущих исследований вследствие ее потенциала в увеличении емкости хранимой квантовой информации, что необходимо например для масштабируемого оптического квантового компьютера [2] и эффективных квантовых повторителей [3].

Среди работ по проблеме многомодовой квантовой памяти, следует отметить [4], в которой рассматривается фазово-согласованное считывание в обратном направлении из памяти рамановского типа и памяти на основе EIT. Достигается хранение нескольких частотно-кодированных кубитов в одном атомном ансамбле. Также была предложена градиентная память на основе фотонного эха для нескольких частотно-кодированных мод [5].

Недавно были проведены эксперименты, демонстрирующие хранение оптических изображений [6–8]. В работе [6] наблюдалась задержка на несколько наносекунд оптических импульсов содержащих в среднем менее одного фотона и несущих двумерные изображения. Задержка была достигнута за счет эффекта медленного света в атомном ансамбле. Однако в этой работе не было продемонстрировано сохранение свойств квантового поля. Хранение классических изображений в теплых атомных парах при помощи EIT (электромагнитно индуцированная прозрачность) взаимодействия было исследовано в [7, 8].

Пространственно многомодовые квантовые протоколы для света без использования памяти были разработаны в области квантовых изображений, что отражено в обзоре [9]. Примерами таких протоколов являются квантовая голографическая телепортация [10], телеклонирование [11] и квантовое плотное кодирование оптических изображений [12]. Пространственно многомодовое квантовое перепутывание для орбитального углового момента света [13] рассматривается как ресурс для квантовой криптографии. Пространственно многомодовый свет в перепутанном состоянии Эйнштейна-Подольского-Розена для непрерывных переменных [14] был недавно экспериментально получен с помощью четырех волнового смещения [15].

Сказанное выше свидетельствует об актуальности темы диссертации, так как исследования квантовых, и в частности, многомодовых квантовых протоколов, а также квантовой памяти являются важными темами современной научно-исследовательской работы. В этой области заняты ведущие мировые теоретические и экспериментальные группы.

Целью диссертационной работы является предложение и теоретическое исследование пространственно многомодовых протоколов квантовой памяти для оптических изображений на основе атомного ансамбля спин-поляризованных атомов.

Основными направлениями исследований явились:

1. Построение теории, описывающей эволюцию коллективного спина протяженного атомного ансамбля и, взаимодействующего с ним, поперечно распределенного, квантового электромагнитного поля в параксиальном приближении, на основе уравнений Гейзенберга.
2. Предложение и исследование протокола тонкой квантовой голограммы, на основе двухпроходного взаимодействия нерезонансного света с ансамблем спин-поляризованных атомов.
3. Предложение и исследование варианта протокола тонкой квантовой голограммы с использованием обратной связи.
4. Предложение и исследование протокола объемной квантовой голограммы, на основе нерезонансного взаимодействия встречного сигнального и опорного поля с ансамблем атомов в постоянном магнитном поле.
5. Анализ шумов записи, различной природы, для квантовых голограмм. Вычисление величин, характеризующих качество работы протокола памяти, таких как верность и эффективность.
6. Оценка числа пространственных мод, которые сможет хранить тонкая и объемная квантовая голограмма на экспериментально доступном атомном ансамбле.

Научная новизна

1. Предложены новые протоколы квантовых голограмм на основе пространственно протяженных атомных ансамблей.
2. Построены динамические уравнения для пространственно многомодовой модели квантовой памяти в представлении Гейзенберга, описыва-

ющие эволюцию коллективного спина атомного ансамбля и взаимодействия с ним квантового электромагнитного поля в параксиальном приближении.

3. Впервые исследованы шумы, возникающие при записи тонкой голограммы методом двойного прохода и с использованием обратной связи. Проанализировано зашумление сигнала вследствие рассеяния сигнального поля, антисжатой квадратуры считывающего поля и вакуумных флуктуаций на пространственных флуктуациях атомной плотности. Этот эффект принципиально не может быть учтен в одномодовом подходе, рассматривавшемся прежде.
4. Найдена верность записи-считывания когерентных квантовых состояний для тонкой голограммы как функция размера пикселя изображения при использовании широкополосного сжатого света для считывания тонкой голограммы.
5. Показано, что дифракция света в атомном слое, в случае объемной голограммы, не лимитирует пространственное разрешение памяти, в отличие от протокола тонкой квантовой голограммы.
6. Оценено число пространственных мод, которые сможет хранить тонкая и объемная квантовая голограмма в атомном ансамбле с заданными параметрами.

Практическая значимость. Предложенные в настоящей работе новые протоколы пространственно многомодовой квантовой памяти могут быть использованы для создания масштабируемого оптического квантового компьютера [2] и эффективных квантовых повторителей [3], позволяющих существенно расширить дальность передачи информации методами квантовой криптографии. Найденные оценки шумов, числа пространственных мод, приведен-

ные оценки времени жизни памяти в зависимости от теплового движения атомов, привязаны к параметрам эксперимента, который готовится с целью демонстрации квантовых голограмм.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Квантово-оптические схемы, реализующие новые протоколы квантовых голограмм на основе пространственно протяженных атомных ансамблей.
2. Теория взаимодействия протяженного ансамбля спин-поляризованных атомов с пространственно многомодовым квантованным электромагнитным полем, развитая в формализме Гейзенберга в параксиальном приближении.
3. Расчеты и оценки шумов возникающих при записи тонкой голограммы методом двойного прохода и с использованием обратной связи. Оценки зашумления сигнала вследствие рассеяния сигнального поля, антисжатой квадратуры считывающего поля и вакуумных флуктуаций на пространственных флуктуациях атомной плотности.
4. Расчет верности записи-считывания когерентных квантовых состояний для тонкой голограммы в зависимости от размера пикселя изображения при использовании широкополосного сжатого света для считывания тонкой голограммы.
5. Расчет, демонстрирующий нечувствительность (в смысле пространственного разрешения) квантовой объемной голограммы к дифракции. Вычисления собственных функций этой памяти и эффективности считывания в прямом и обратном направлениях для объемной голограммы.

6. Оценки числа пространственных мод, которые может хранить тонкая и объемная квантовая голограмма на экспериментально доступном атомном ансамбле.

Апробация работы. По материалам диссертации выполнены доклады на следующих конференциях и научных семинарах:

- Первый Русско-Французский семинар по лазерной физике для молодых ученых (Санкт-Петербург, Россия, 2004);
- Международная школа-семинар по фундаментальной физике для молодых ученых “Квантовые измерения и физика мезоскопических систем” КИФМС-2005 (Суздаль, Россия, 2005);
- IV-ый и V-ый семинары по квантовой оптике, посвященные памяти Д.Н. Клышко (Москва, Россия, 2005, 2007);
- The 3rd International Workshop “Quantum Physics and Communication” QPC 2005 (Дубна, Россия, 2005);
- XII International Conference on Quantum Optics ICQO’2006, (Минск, Белоруссия, 2006);
- XII International Conference on Laser Optics, (Санкт-Петербург, Россия, 2006);
- ICONO/LAT 2007, (Минск, Белоруссия, 2007);
- Solvay Workshop “Bits, Quanta, and Complex Systems: modern approaches to photonic information processing” (Брюссель, Бельгия, 2008);
- Summer School “Quantum and Nonlinear Optics-2008” (Backfallsbyn, Hven (Sweden), Aug. 24 to Aug. 30, 2008);

- Третий Русско-Французский семинар по лазерной физике для молодых ученых (Санкт-Петербург, Россия, 2008);
- а так же на городском межинститутском семинаре по квантовой оптике при РГПУ им. А.И. Герцена, на семинаре национального центра по квантовой оптике QUANTOP Института Нильса Бора (Копенгаген, Дания), на семинаре центра по квантовой информации и коммуникации QuIC при Брюссельском свободном университете (Брюссель, Бельгия) и на семинаре теоретической кафедры Института Макса Планка по квантовой оптике (Мюнхен, Германия).

Публикации. Основное содержание и результаты диссертации отражены в следующих публикациях:

- [16] *Denis V. Vasilyev, Ivan V. Sokolov and Eugene S. Polzik.* Quantum memory for images: A quantum hologram. // *Phys. Rev. A*, 2008, 77, 020302(R)
- [17] *Денис В. Васильев, Иван В. Соколов и Eugene S. Polzik.* Квантовая память для изображений с использованием обратной связи // *Оптика и Спектроскопия*, 2009, том 106, №6, с. 962
- [18] *Denis V. Vasilyev, Ivan V. Sokolov and Eugene S. Polzik.* A volume quantum hologram. // Third Russian-French Laser Physics Workshop for Young Scientists, Technical Digest, 2008, p. 14
- [19] *Denis V. Vasilyev, Ivan V. Sokolov and Eugene S. Polzik.* A quantum volume hologram. // *E-print: arXiv:0906.1528*

Личный вклад автора. Основные результаты, представленные в диссертации получены автором лично; выбор общего направления исследования,

обсуждение и постановка рассматриваемых задач осуществлялись совместно с научным руководителем.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, четырех глав, заключения и четырех приложений. Полный объем диссертационной работы составляет 109 страниц текста, в том числе 9 рисунков и 67 наименований в списке литературы.

Обзор литературы

В последнее время начала активно развиваться новая область науки, образовавшаяся на стыке квантовой теории и теории информации – теория квантовой информации. Предметами ее исследования являются вопросы квантовых вычислений, квантовых компьютеров, квантовой телепортации и квантовой криптографии, проблемы декогеренции. Определяющей особенностью данной области исследований является существенно квантовые свойства носителя информации.

Впервые учет квантового характера носителя информации потребовался для исследования ограничений, накладываемых квантовыми особенностями устройств преобразования информации, например, в задачах обработки электромагнитных сигналов. Начала исследования пропускной способности квантовых информационных каналов были положены в 60–70-х гг. прошлого века [20–25]. Верхняя достижимая граница для количества информации в квантовом канале с классическим входом, была найдена Холево [26], в настоящее время известна как информация Холево. Несмотря на довольно продолжительный период исследования вопроса информационных свойств каналов связи, эта работа не прекращается до настоящего времени. Дело в том что, квантовые особенности канала, такие как суперпозиция состояний, перепутанные состояния, порождают новые возможности, принципиально нереализуемые для классического канала связи, рассмотренного Шэнноном [27]. Как следствие, количественные характеристики конкретных каналов связи, такие например, как информация Холево, трудно поддаются вычислению, не говоря уже о поиске глобального максимума этих характеристик. Лишь недавно была найдена информационная емкость для важного частного случая каналов связи – бозонного канала с тепловыми шумами и линейными потерями [28, 29]. Аналогичная характеристика для классического непрерывного кана-

ла связи с гауссовыми шумами была установлена Шэнноном более полувека назад [27].

Вероятно наиболее интригующие разделы квантовой теории информации возникают как следствия квантовой природы исследуемых объектов, не имеющие классического аналога. Иногда это позволяет найти принципиально новые решения важных прикладных задач. Речь идет о таких разделах квантовой теории информации как квантовые вычисления, квантовая криптография, квантовая телепортация, в которых уже экспериментально продемонстрировано практическое применение специфических особенностей квантовой информации.

Аналог классического носителя информации – кубит (от английского qubit – quantum bit), как квантовый объект, может находиться в любой суперпозицию двух базисных состояний. В квантовых вычислениях это дает возможность построения квантовых алгоритмов, решающих некоторые задачи за существенно меньшее число шагов чем лучшие классические алгоритмы. Фейнман первым предложил использовать для решения такой сложной для классических алгоритмов задачи как моделирование динамики квантовой системы, другую квантовую систему – квантовый компьютер, универсальное квантовое моделирующее устройство, использующее кубиты как носители информации [30]. Возможно ли ускорить решения других задач оставалось не ясно до середины 90-х г., когда Шор предложил квантовый алгоритм факторизации чисел [31]. Сложность разложения достаточно большого числа на простые множители за разумное время является основой современной криптографии. Дело в том, что для разложения n -значного числа классическому алгоритму требуется экспоненциально большое число шагов, ту же задачу квантовый алгоритм Шора выполняет за число шагов порядка n^2 , что переводит задачу факторизации чисел в разряд решаемых и потенциально позволяет скомпрометировать классическую криптографию. Другой алгоритм,

предложенный Гровером [32], позволяет осуществлять поиск в несортированной базе данных из N элементов за число шагов порядка \sqrt{N} , классический алгоритм решает эту задачу за число шагов порядка N . На данный момент известен целый ряд квантовых алгоритмов выполняющихся асимптотически быстрее классических аналогов. Появление новых алгоритмов стимулировало исследование проблемы экспериментального создания квантового компьютера во многих лабораториях мира, достигнутые экспериментальные результаты [33, 34] позволяют надеяться на создание полноценного квантового компьютера в обозримом будущем. Стоит отметить одну интересную тонкость. Дело в том, что хотя и найдены квантовые алгоритмы, работающие значительно эффективнее классических, никто еще не смог доказать что в принципе не может существовать классического алгоритма столь же эффективного сколь квантовый. Это очень сложная математическая задача, ответ на которую поможет глубже понять в чем заключается мощь квантовых вычислений.

Самой успешной областью применения специфических свойств квантовых носителей информации, безусловно является квантовая криптография. Идея, на которой базируются протоколы квантовой криптографии, состоит в том, что произвольное квантовое состояние, неизвестное заранее, нельзя клонировать, то есть создать его точную копию. Принцип неклонирования квантовой информации был выражен в работах [35–37]. Эта особенность квантовой информации позволяет распределять секретный ключ абсолютно защищенным способом, а в дальнейшем использовать этот ключ для передачи больших объемов информации посредством классической криптографии. В отличие от классической криптографии с открытым ключом, которая основана на сложности решения таких задач как разложения большого числа на простые множители и защитой является лишь большое (в среднем) время решения такой задачи, квантовая криптография позволяет добиться *абсолютно* надежной передачи ключа. Обоснованием секретности для квантовой крип-

тографии являются законы квантовой механики, другими словами законы природы.

Беннет и Brassard предложили первый квантовый протокол криптографии в 1984 году [38] и спустя всего пять лет уже был продемонстрирован работающий экспериментальный прототип [39]. К настоящему времени предложено несколько усовершенствованных протоколов [40–42] и даже более того, стали доступны коммерческие продукты реализующие протоколы квантовой криптографии [43], это безусловно самый крупный успех квантовой теории информации на данный момент.

Уникальные свойства квантовой информации, такие как неклонируемость, наличие перепутанных состояний, приводят к существованию особых способов передачи квантовой информации, абсолютно не имеющих классического аналога. В 1993 году был предложен протокол квантовой телепортации [44, 45], позволяющий разложить произвольное неизвестное квантовое состояние на чисто классическую информацию и чисто квантовые корреляций ЭПР (Эйнштейна–Подольского–Розена), и восстановить позднее в другом месте. Спустя всего три года, группа Цайлингера продемонстрировала квантовую телепортацию фотона экспериментально [46]. С тех пор был достигнут значительный прогресс в экспериментальной квантовой оптике и реализована квантовая телепортация со света на атомы [47], а совсем недавно, несмотря на довольно низкую, чтобы быть полезной (удачной оказывается одна попытка на 10^8), эффективность процесса, квантовая телепортация между удаленными материальными кубитами [48].

Как можно заметить из приведенного выше обзора, настоящий расцвет теории квантовой информации, который наблюдается сейчас, начался сравнительно недавно. Бурное развитие теоретических исследований в этой области, как это обычно бывает, обусловлено значительно возросшими возможностями экспериментальных методов в квантовой оптике, атомной физике и физике

твёрдого тела. В отличие от первых экспериментов, когда доступными для контроля были лишь макроскопические параметры системы, современный экспериментатор может создавать, манипулировать и измерять квантовые состояния объектов на микроскопическом уровне, что открывает новые горизонты во многих фундаментальных вопросах.

1. Квантовая память

Из приведенного выше обзора видно, что разнообразие квантовых информационных протоколов и приложений придуманных на данный момент довольно велико. Можно смело утверждать, что практически любая область приложения квантовой информации выиграет от использования *квантовой памяти*. Под квантовой памятью мы понимаем прибор, который позволяет эффективно переносить квантовое состояние одной подсистемы (как правило коротко живущей) на другую, долгоживущую систему и обратно. Эта задача возникает от того, что существуют разные физические системы, используемые как носители квантовой информации. Наиболее удобными для использования носителями кубитов безусловно являются фотоны. Неслучайно единственной пока коммерческой реализацией идей квантовой информации оказалась квантовая криптография (передача секретного ключа абсолютно защищенным способом) [43], которую удалось создать используя только фотоны.

Привлекательность фотонов кроется, во-первых, в возможности легко изолировать их от окружающей среды и добиться унитарности эволюции квантового состояния. Во-вторых, распространяясь со скоростью света, электромагнитное поле идеально подходит для передачи информации на большие расстояния. Наконец, фотоны относительно дешевы. Если последнее свойство – бесспорное достоинство, то первые два удобны отчасти, лишь только для

передачи квантовой информации. Из-за скорости распространения, электромагнитное поле слабо подходит для долговременного хранения квантовой информации, длинные линии задержки приводят к декогеренции, то есть потере квантовой информации.

Практически идеальной системой для хранения квантовой информации являются внутренние долгоживущие степени свободы атомов. Задача создания квантовой памяти сводится к реализации эффективного квантового интерфейса между светом и веществом. Проблема в том, что насколько просто изолировать фотоны от окружающей среды, столь же сложно организовать достаточно эффективное взаимодействие электромагнитного поля и вещества.

Здесь существует два подхода. Можно поместить единственный атом в очень высококачественный резонатор и таким образом добиться эффективного обмена квантовыми состояниями между атомом и фотонами. Второй подход, основанный на непрерывных полевых и атомных переменных, имеет большое практическое преимущество. Эффективный обмен квантовыми состояниями между коллективными переменными света и атомов достигается в свободном пространстве при очень слабом взаимодействии в расчете на один фотон/атом. Здесь требование сильного взаимодействия единственного атома и поля сводится к высокой резонансной оптической плотности атомного ансамбля, что легче достичь экспериментально. Подход использующий взаимодействие света с коллективным суперпозиционным состоянием атомов в ансамбле лежит в основе квантовых интерфейсов на основе QND – квантового неразрушающего взаимодействия, EIT – электромагнитно индуцированной прозрачности, рамановского взаимодействия в Λ -схемах, фотонного эха, что подробно описаны в обзоре [1]. В данной работе мы будем исследовать пространственно многомодовые протоколы квантовой памяти на основе взаимодействия типа QND.

Вообще говоря, квантовый интерфейс, осуществляющий обмен квантовыми состояниями между световой и атомной подсистемами, можно описать в картине Шредингера как унитарную эволюцию следующего вида $\hat{U}|\Psi_L, 0_A\rangle \rightarrow |0_L, \Psi_A\rangle$. В представлении Гейзенберга это соответствует операторному преобразованию $\hat{U}^\dagger \hat{a}_L \hat{U} = \hat{a}_A$. Если удастся найти реальное физическое взаимодействие, приводящее, хотя бы приближенно, к такой эволюции, это будет означать что мы получили квантовую память.

Для двух абстрактных квантовых осцилляторов можно написать гамильтониан взаимодействия, приводящий к требуемой эволюции:

$$H = \hbar\omega \left(a_L^\dagger a_A + a_A^\dagger a_L \right) = \hbar\omega (X_L X_A + P_L P_A), \quad (1)$$

где a_L и a_A обозначают операторы уничтожения для “светового” и “атомного” осциллятора соответственно. Также мы ввели канонические переменные для каждого осциллятора $X = \sqrt{2} \operatorname{Re}[a]$ и $P = \sqrt{2} \operatorname{Im}[a]$. Эволюция системы, описываемой таким гамильтонианом, сводится к периодическому (с частотой $2\omega/\pi$) обмену состояниями двух осцилляторов. Для реализации квантовой памяти нужно уметь включать и выключать в нужный момент такое взаимодействие. Если остановить взаимодействие по прошествии времени $\pi/2\omega$, то осцилляторы обменяются состояниями. Атомный осциллятор запишет начальное состояние световой подсистемы, а световая подсистема считает начальное состояние атомной. Повторное включение взаимодействия на указанный промежуток времени опять приведет к обмену состояниями, в итоге световая подсистема считает записанное начальное состояние светового осциллятора.

Реализовать такое взаимодействие атомной и световой подсистемы на практике весьма непросто. Поэтому существуют подходы приближенно приводящие к требуемой эволюции. Квантовая память на основе рамановского взаимодействия и электромагнитно индуцированной прозрачности используют

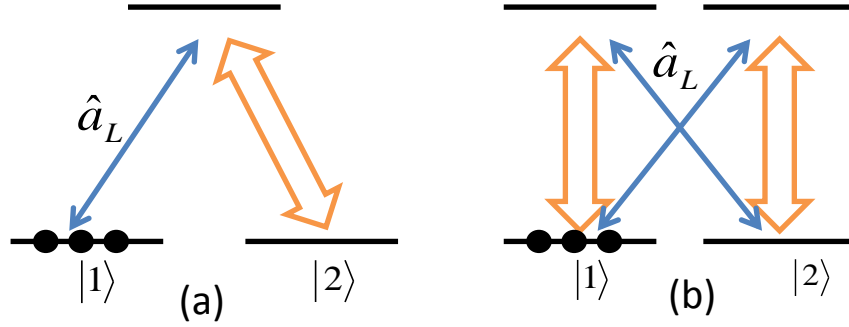


Рис. 1. Схемы уровней (двойная стрелка обозначает сильное классическое поле, одинарная – квантовое поле): (a) Λ -схема – основа для ЕИТ и рамановской схемы памяти, также известно как взаимодействие типа делительной пластинки, (b) квантовое неразрушающее (QND) или фарадеевское взаимодействие – позволяет реализовать квантовую память, перепутывание и телепортацию.

взаимодействие света с атомами с Λ -схемой уровней (Рис. 1a). В этих схемах атомы изначально приготовлены в одном из основных подуровней, с которым взаимодействует квантовое поле, на другом переходе действует сильное классическое поле. После адиабатического исключения верхнего уровня, взаимодействие описывается эффективным гамильтонианом вида (1), в котором a_L есть оператор уничтожения фотонов, а a_A является оператором атомного перехода $|1\rangle\langle 2|$. Есть правда заметное отличие, в том, что взаимодействие носит локальный характер, то есть операторы каждой из подсистем зависят от координаты $a_{L(A)}(\vec{r}, t)$. Полный гамильтониан взаимодействия есть интеграл по объему атомного ансамбля. В результате, взаимодействие не сводится к простому обмену состояниями между световым и атомным осцилляторами. Задача становится существенно многомодовой, взаимодействие происходит между световым и атомным квантовыми полями. Однако, можно восстановить подобие идеального взаимодействия, рассмотрев собственные моды такой памяти. Тогда для каждой из амплитуд собственных мод, световой и

атомной подсистем ([1, 49], такие же преобразования возникнут в объемной голограмме в главе 4), можно записать преобразование обмена следующего вида:

$$a_L^{out} = \sqrt{\nu}a_A^{in} + \sqrt{1-\nu}a_L^{in} \quad (2)$$

$$a_A^{out} = \sqrt{\nu}a_L^{in} - \sqrt{1-\nu}a_A^{in} \quad (3)$$

Это преобразование подобно преобразованию делительной пластинки. Коэффициент ν соответствует коэффициенту отражения пластинки. Однократный обмен состояниями – есть запись, повторное взаимодействие считывает записанное квантовое состояние обратно на свет. Поскольку прохождение через две делительных пластинки эквивалентно одной пластинке с соответствующим коэффициентом отражения, можем сразу записать связь считанного поля со входным (учтем что начальное состояние атомов и считывающего поля вакуумное)

$$a_L^{read} = \sqrt{\eta}a_L^{in} + \sqrt{1-\eta}a^{vac} \quad (4)$$

Коэффициент пропускания результирующей делительной пластинки η называют эффективностью памяти, он равен отношению числа фотонов в считанном поле к числу фотонов во входном поле. Все схемы памяти, взаимодействие в которых описывается гамильтонианом типа (1), приводят к такому преобразованию типа делительной пластинки, и, если не привносятся дополнительных шумов, могут быть охарактеризованы одним параметром – эффективностью η .

Рассмотрим память на основе неразрушающего взаимодействия [50], схема взаимодействия изображена на Рис. 1b. Нерезонансное взаимодействие света (сильное классическое поле в x поляризации и y -поляризованное квантовое поле a_L) со спин-поляризованными вдоль оси x атомами может быть

описано эффективным гамильтонианом ([1, 51] и приложение А)

$$H_{eff} \sim S_z J_z.$$

Здесь J_z – проекция атомного спина на ось z , а S_z есть компонента оператора Стокса для света, в случае наличия классического поля (предполагаем вещественным) в x -поляризации может быть выражен как $S_z = -iA_x(a_L - a_L^\dagger)$. Квантовое неразрушающее взаимодействие между светом и атомами порождает два основных эффекта: (а) фарадеевский поворот поляризации света, индуцированный продольной z -компонентой коллективного спина атомов, и (б) поворот атомного спина, вызванный неравными световыми сдвигами магнитных подуровней $m_z = \pm 1/2$ основного состояния при различающихся интенсивностях вкладов ортогональных круговых поляризаций в полную световую волну. В приближении малых поворотов спина и световой поляризации, когда классическая составляющая коллективного спина J_x много больше двух оставшийся компонент спина, а классическое поле в x поляризации много сильнее ортогонально поляризованного квантового поля, можно заменить классические составляющие их численными средними значениями. Тогда, учитывая что $S_z \sim P_L$ и определяя канонические переменные для атомов $X_A = J_y/\sqrt{\langle J_x \rangle}$, $P_A = J_z/\sqrt{\langle J_x \rangle}$, можем записать гамильтониан взаимодействия в виде

$$H_{eff} \sim S_z J_z \sim P_L P_A. \quad (5)$$

Видим, что гамильтониан фарадеевского взаимодействия (5) соответствует лишь “половине” гамильтониана идеальной памяти (1). То есть его не достаточно для достижения обмена квантовыми состояниями. Можно исправить ситуацию, дважды включая фарадеевское взаимодействие для разных канонических переменных. Этого можно добиться двумя проходами светового импульса через атомный ансамбль, причем между проходами нужно повернуть атомный спин (например магнитным полем) и световые канонические пере-

менные (внеся фазовый сдвиг $\pi/2$ между сигнальным и опорным полями). Таким образом удастся достичь неидеального обмена квантовыми состояниями между светом и атомами. Дело в том, что суммарная эволюция после двух проходов не в точности эквивалентна эволюции идеальной памяти, просто потому, что канонические переменные не коммутируют $[X, P] = i$

$$U_{sum} \sim e^{iX_L X_A} \cdot e^{iP_L P_A} \neq e^{i\frac{\pi}{2}(X_L X_A + P_L P_A)}.$$

Такая эволюция приводит к связи входных и выходных состояний атомного и светового осцилляторов следующего вида

$$X_L^{out} = P_A^{in} + X_L^{in}, \quad (6)$$

$$P_L^{out} = -X_A^{in}, \quad (7)$$

$$X_A^{out} = P_L^{in} + X_A^{in}, \quad (8)$$

$$P_A^{out} = -X_L^{in}. \quad (9)$$

Обмен состояниями получился с точностью до поворота канонических переменных, это произошло потому, что в оператор эволюции мы не включили поворот, который осуществляем между этапами взаимодействия. Неидеальность обмена квантовыми состояниями на основе двухпроходного фарадеевского взаимодействия заключается в том, что атомная и световая подсистемы не полностью забывают свое начальное состояние. Обмен квантовыми состояниями происходит с точностью до аддитивного шума от “незабытого” начального состояния. Этот шум можно уменьшить, если при записи приготовить атомы в сжатом состоянии с подавленной X_A^{in} квадратурой. При считывании то же самое нужно сделать со считывающим светом. Далее эта проблема, с возникающими пространственными аспектами, будет проанализирована в главе 2, где будет представлена и рассмотрена тонкая квантовая голограмма, которая основана на описанном взаимодействии неразрушающего типа.

2. Границы классической и квантовой памяти

Для того, чтобы говорить о квантовой памяти, нужно обозначить границы, показывающие какая точность хранения квантовых состояний доступна только квантовой памяти, а что может быть достигнуто и классической стратегией.

Наиболее распространенной мерой качества передачи квантового состояния является верность (fidelity) F . Для чистого исходного состояния $|\Psi_{in}\rangle$ определяется следующим образом

$$F(|\Psi_{in}\rangle) = \langle \Psi_{in} | \rho_{out} | \Psi_{in} \rangle. \quad (10)$$

Здесь ρ_{out} обозначает матрицу плотности статистического ансамбля, соответствующего восстановленному состоянию системы. Верность показывает близость конечного состояния системы к исходному, в пределе идеальной передачи $F = 1$. При наличии целого ансамбля исходных состояний $\{|\Psi_x\rangle\}$ с соответствующими вероятностями реализации p_x , определяют среднюю верность для ансамбля

$$\bar{F} = \sum_x p_x F(|\Psi_x\rangle). \quad (11)$$

Существует определение верности обобщенное на случай смешанных исходных состояний, описываемых матрицей плотности, однако оно сложнее для вычислений, поэтому чаще используют именно среднюю верность, определенную выше. Верность очевидно зависит не только от свойств квантового канала, но и от исходного квантового состояния. Для некоторых важных состояний, таких как когерентные или сжатые состояния (нас интересуют непрерывные переменные) найдены пределы точности классических схем [52, 53]. Для наилучшей классической стратегии, в работе [52], найдена граница верности передачи и хранения ансамбля когерентных состояний с гауссовым распределением. В пределе бесконечно широкого распределения имеем границу

$F = 1/2$, которую должна превзойти любая квантовая память при хранении когерентных состояний. Задача поиска границы верности для классической схемы передачи сжатых состояний решена в [53].

Преодоление границ верности, найденных для классических схем в выше указанных работах не означает, однако, что автоматически становится возможной передача или хранение квантовой информации, то есть кубитов. Дело в том, что любые классические стратегии соответствуют схеме клонирования $1 \rightarrow \infty$ (потому как классическая информация может быть скопирована сколько угодно раз). Однако если рассмотреть схему клонирования $1 \rightarrow 2$ для когерентных состояний, то получим границу верности $F = 2/3$, что показано в [54]. Значит, чтобы быть уверенным, что принимающая сторона получила наилучшую копию исходного состояния, квантовый канал должен продемонстрировать верность $F > 2/3$. Как следствие неклонирования квантовой информации получаем невозможность передачи квантовой информации по квантовому каналу с верностью ниже либо равной указанной границы. Следует отметить, что верность клонирования $1 \rightarrow 2$ была найдена для гауссовых клонирующих машин. В работе [55] доказано, что оптимальной является негауссова схема клонирования, которая дает чуть более высокую границу верности $F = 0,6826$. Пользуясь терминологией авторов [54] можно сказать, что канал обеспечивающий верность передачи $F \leq 1/2$ является классической факс машиной, в диапазоне $1/2 < F \leq 0,6826$ лежит квантовый факс, квантовый канал, демонстрирующий верность $F > 0,6826$ (для класса когерентных состояний) обеспечивает квантовую телепортацию.

Но даже преодоление границы верности для клонирующей машины $1 \rightarrow 2$ не гарантирует возможность надежно сохранять и восстанавливать, с помощью коррекции ошибок, квантовую информацию. Единственный способ показать, что квантовая память или любой другой квантовый канал может хранить/передавать квантовую информацию [56] – это посчитать квантовую

емкость [57] для этого канала и убедится, что она выше нуля. Задача эта непростая и для каналов с аддитивным гауссовым шумом (например телепортация, квантовая память на основе QND в предыдущем разделе) не решена на настоящий момент.

Квантовая память, основанная на взаимодействии типа делительной пластинки, описывается параметром эффективности η (отношение числа фотонов в считанном импульсе к числу фотонов в исходном импульсе), введенном в предыдущем разделе. Эффективность не просто конвертировать в верность однозначно. Например, для любой эффективности близкой к единице, всегда найдется входное когерентное состояние, которое после ослабления в $\sqrt{\eta}$ раз перестанет перекрываться с исходным, что даст верность близкую к нулю. Можно попытаться ввести усиление выходного сигнала до уровня входного и вычислять верность уже после усиления. Но нет гарантии что не может быть способа лучше. К счастью, в случае квантового канала типа делительной пластинки (гауссовый канал с потерями с минимальным шумом), найдено выражение для квантовой емкости [58]. Для входного ансамбля случайно распределенных когерентных состояний выражение для квантовой емкости зависит только от эффективности η :

$$Q(\eta) = \max\{0, \log_2 |\eta| - \log_2 |1 - \eta|\}. \quad (12)$$

Из этого выражения легко можно получить, что режим квантовой памяти достигается при $\eta > 1/2$. Следует также отметить, что это не относится к условной (conditional) квантовой памяти, которая работает вероятностно и может сохранить кубит при любой эффективности памяти, вероятность ее срабатывания стремится к нулю вместе с эффективностью.

Взаимодействие многомодового света с ансамблем поляризованных атомов

Данная глава посвящена изложению необходимого аппарата и выводу уравнений взаимодействия пространственно многомодового света с атомным ансамблем. Сначала излагается подход к описанию пространственно многомодовой задачи. Затем представляется модель взаимодействия атомов со спином $J = 1/2$ с нерезонансным полем, выводятся уравнения эволюции системы в параксиальном приближении. Полученные уравнения решаются и рассматривается приближение тонкого слоя.

1.1. Распространение и дифракция света в свободном пространстве

Будем рассматривать распространение света следуя [14, 59]. Введем медленно меняющиеся операторы рождения и уничтожения фотонов $A(z, \vec{\rho}, t)$ и $A^\dagger(z, \vec{\rho}, t)$,

$$E^{(+)}(z, \vec{\rho}, t) = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{c}} \exp[i(k_0z - \omega_0t)]A(z, \vec{\rho}, t),$$

где ω_0 несущая частота волны распространяющейся в $+z$ направлении и $k_0 = \omega_0/c$ ее волновое число, а $\vec{\rho}$ координата в плоскости ортогональной направлению z . Оператор $A(z, \vec{\rho}, t)$ записывается следующим образом

$$A(z, \vec{\rho}, t) = \int \frac{dk_z}{2\pi} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\omega(k)}{k_0}} a(\vec{k}) \exp[i(\vec{q} \cdot \vec{\rho} + (k_z - k_0)z - (\omega(k) - \omega_0)t)], \quad (1.1)$$

где $a(\vec{k})$ и $a^\dagger(\vec{k})$ операторы рождения и уничтожения пространственной моды с волновым вектором \vec{k} . Как обычно, они удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = 0.$$

Временная эволюция медленно меняющегося оператора $A(z, \vec{\rho}, t)$ описывается следующим уравнением:

$$\dot{A}(z, \vec{\rho}, t) = i\omega_0 A(z, \vec{\rho}, t) + \frac{i}{\hbar} [H, A(z, \vec{\rho}, t)]. \quad (1.2)$$

Выше первый вклад справа компенсирует быстрое развитие, вносимое свободной частью гамильтониана. Гамильтониан электромагнитного поля в области пространства объемом V записывается следующим образом

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{c} \int_V d\vec{r} A^\dagger(z, \vec{\rho}, t) A(z, \vec{\rho}, t) + H_{eff}, \quad (1.3)$$

множитель c^{-1} появился из-за нормировки операторов поля, такой, что среднее значение $\langle A^\dagger(z, \vec{\rho}, t) A(z, \vec{\rho}, t) \rangle$ определяет среднюю плотность потока в фотонах через см^2 в секунду в точке $\vec{\rho}$ и момент времени t . Размерный фактор $SL/c = ST$, возникающий в (1.3), превращает эту плотность в число фотонов в объеме поля $V = SL$, где $T = L/c$ - время пробега света.

Чтобы вычислить коммутатор в правой части (1.2) нам нужно знать коммутационное соотношение для медленно меняющихся амплитуд. Используя (1.1) можем получить требуемое соотношение

$$\begin{aligned} & [A(z, \vec{\rho}, t), A^\dagger(z', \vec{\rho}', t)] = \\ & = c \int \frac{dk_z}{2\pi} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \frac{\omega(k)}{k_0} \exp[i(\vec{q} \cdot (\vec{\rho} - \vec{\rho}') + (k_z - k_0)(z - z'))] \equiv c\tilde{\delta}(\vec{r} - \vec{r}'). \end{aligned}$$

В случае квазимонохроматического и параксиального приближения можем написать приближенное выражение для этой “неправильной” δ -функции

$$\tilde{\delta}(\vec{r} - \vec{r}') \approx \left(1 - \frac{i}{k_0} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2k_0^2} \nabla_\perp^2 \right) \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.4)$$

Приведенные рассуждения помогут нам описывать пространственно многомодовую задачу взаимодействия света с ансамблем атомов. Само же взаимодействие будет представлено следующим эффективным гамильтонианом.

1.2. Эффективный гамильтониан и уравнение распространения

Мы рассматриваем ансамбль неподвижных, случайно распределенных атомов, для простоты, обладающих спином $J = 1/2$ в основном и возбужденном состояниях (Рис. 1b). Атомы расположены достаточно далеко друг от друга, так что между ними нет взаимодействия. Спин долгоживущего основного состояния атома изначально ориентирован по оси x вертикально. Классическое нерезонансное x -поляризованное поле с частотой ω_0 и медленной амплитудой A_x (предполагаем вещественной) распространяется в направлении $+z$. Входным сигналом является слабое квантованное y -поляризованное поле на той же частоте ω_0 , среднее направление распространения так же $+z$. Мы будем рассматривать это многомодовое входное поле с медленно меняющейся амплитудой $A_y(\vec{r}, t) \ll A_x$ в параксиальном приближении.

Взаимодействие такой системы хорошо описывается известным гамильтонианом квантового неразрушающего взаимодействия [1, 51]. Поскольку здесь мы имеем достаточно слабое нерезонансное взаимодействие, то эффективный гамильтониан возникает во втором (первом исчезающем) порядке теории возмущений по взаимодействию света и атомов, более подробно вывод приводится в приложении А.

Квантовое неразрушающее взаимодействие между светом и веществом порождает два основных эффекта: (а) фарадеевский поворот поляризации света, индуцированный продольной z -компонентой коллективного спина атомов, и (б) поворот атомного спина, вызванный неравными световыми сдвига-

ми магнитных подуровней $m_z = \pm 1/2$ основного состояния при различающихся интенсивностях вкладов ортогональных круговых поляризаций в полную световую волну. Эффективный гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{2\pi k_0 |d|^2}{\omega_{eg} - \omega_0} \int_V d\vec{r} \sum_a J_z^a(t) S_z(\vec{r}, t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a). \quad (1.5)$$

Здесь ω_{eg} есть частота невозмущенного атомного перехода, d – матричный элемент дипольного момента перехода и $k_0 = \omega_0 c$. Нам удобнее будет перейти от операторов атомного спина и вектора Стокса к полевым переменным, как для света, так и для атомов. Проекция вектора Стокса на ось z определяется как

$$S_z(\vec{r}, t) = -iA_x [A_y(\vec{r}, t) - A_y^\dagger(\vec{r}, t)].$$

Медленная амплитуда A_y задается как указано в предыдущем разделе, выражение (1.1). Удовлетворяет, найденному там же, коммутационному соотношению

$$[A_y(z, \vec{\rho}, t), A_y^\dagger(z', \vec{\rho}', t)] \approx c \left(1 - \frac{i}{k_0} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2k_0^2} \nabla_\perp^2 \right) \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.6)$$

Поскольку атомы дискретно распределены в пространстве и вообще полем не являются, то с определением соответствующих пространственных полевых переменных для них дела обстоят интереснее.

Определим плотность коллективного спина как $\vec{J}(\vec{r}) = \sum_a \vec{J}^a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$.

Найдем коммутационное соотношение для y, z компонент коллективного спина, усредненное по случайному распределению атомов

$$\overline{[J_y(\vec{r}), J_z(\vec{r}')] } = i \sum_a \overline{\langle J_x^a \rangle \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a)^a} = i n_a \langle J_x^a \rangle \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (1.7)$$

здесь n_a есть средняя атомная плотность. Указанное усреднение по случайному положению каждого из атомов проводится как показано ниже:

$$\overline{\dots}^a = \frac{1}{V} \int_V d\vec{r}_a \dots$$

Интересный факт заключается в том, что найденное усредненной коммутационное соотношение (1.7) верно именно в том смысле в котором мы его посчитали – в среднем. Однако, если выделить небольшие равные объемы в атомной среде в разных местах, то коммутационные соотношения для коллективных спинов каждого объема окажутся разными, просто потому что число атомов в каждом объеме разное из-за случайного их распределения. Проявляется это в том, что среднее от квадрата коммутационного соотношения для плотности спина (1.7) не равно нулю. В приложении Б показано как найти классическую флуктуацию плотности этой наблюдаемой, которая по сути является x -проекцией плотности коллективного спина, порождаемую случайностью расположения атомов в поперечном сечении тонкого слоя. Здесь мы воспользуемся, найденным в приложении Б, представлением плотности $J_x(\vec{r})$ как суммы пространственно однородной части и флуктуационной добавки $\delta J_x(\vec{r})$, с указанными ниже статистическими свойствами.

$$\langle J_x(\vec{r}) \rangle = n_a \langle J_x^a \rangle + \delta J_x(\vec{r}), \quad (1.8)$$

$$\overline{\delta J_x(\vec{r})} = 0, \quad \overline{\delta J_x(\vec{r}) \delta J_x(\vec{r}')} = n_a \langle J_x^a \rangle^2 \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Введем канонические переменные для атомов, подобные полевым,

$$X_A(\vec{r}, t) = J_y(\vec{r}, t) / \sqrt{n_a \langle J_x^a \rangle}, \quad P_A(\vec{r}, t) = J_z(\vec{r}, t) / \sqrt{n_a \langle J_x^a \rangle},$$

благодаря пространственной флуктуации атомной плотности и, соответственно, x -проекции спина, эти атомные переменные удовлетворяют “почти” каноническим коммутационным соотношениям.

$$\overline{[X_A(\vec{r}, t), P_A(\vec{r}', t)]} = i \delta(\vec{r} - \vec{r}') \left(1 + \frac{\delta J_x(\vec{r})}{n_a \langle J_x^a \rangle} \right). \quad (1.9)$$

Приступим наконец к выводу уравнения распространения электромагнитного поля. Полный гамильтониан системы, выраженный через свою объ-

емную плотность в терминах канонических переменных, выглядит следующим образом

$$H = \int_V d\vec{r} \left\{ \frac{\hbar\omega_0}{c} A_y^\dagger(z, \vec{\rho}, t) A_y(z, \vec{\rho}, t) - \right. \quad (1.10)$$

$$\left. i \frac{2\pi k_0 |d|^2}{\omega_{eg} - \omega_0} \sqrt{n_a \langle J_x^a \rangle} A_x(z, t) P_A(z, \vec{\rho}, t) [A_y(z, \vec{\rho}, t) - h.c.] \right\}.$$

Как уже упоминалось, мы описываем эволюцию системы в представлении Гейзенберга. Все что нам необходимо мы уже имеем, это коммутационные соотношения (1.6) и (1.9) для поля и атомных переменных. Подставляя их в уравнение Гейзенберга (для света было написано выше (1.2)) производим простые преобразования и получаем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k_0} \nabla_\perp^2 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_y(z, \vec{\rho}, t) = \frac{\kappa}{\sqrt{2LT}} P_A(z, \vec{\rho}, t), \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} X_A(z, \vec{\rho}, t) = \frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{LT}} \left(1 + \frac{\delta J_x(z, \vec{\rho})}{n_a \langle J_x^a \rangle} \right) \text{Im} [A_y(z, \vec{\rho}, t)], \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_A(z, \vec{\rho}, t) = 0. \quad (1.13)$$

Здесь T есть длительность импульса опорного поля прямоугольной формы и L длина атомного ансамбля. Безразмерная константа взаимодействия

$$\kappa = \frac{2\pi k_0 |d|^2}{\hbar(\omega_{eg} - \omega_0)} \sqrt{2n_a \langle J_x^a \rangle A_x^2 LT}, \quad (1.14)$$

должна быть порядка 1 чтобы память работала. Константа взаимодействия может быть представлена в виде $\kappa^2 = \alpha_0 \eta$, где α_0 это резонансная оптическая плотность, а η есть вероятность спонтанного излучения [1]. Для того чтобы пренебречь эффектом спонтанного излучения с возбужденного атомного уровня, должно выполняться условие $\eta \ll 1$, поэтому стандартным требованием для эффективного квантового интерфейса является $\alpha_0 = \lambda^2 n_a L / 2\pi \gg 1$.

1.3. Решение уравнений эволюции

Произведем Фурье преобразование по поперечной координате

$$a(z, \vec{q}, t) = \int d\vec{\rho} A_y(z, \vec{\rho}, t) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}}, \quad (1.15)$$

и аналогично для атомных переменных. Получаем систему уравнений, описывающих эволюцию нашей системы в Фурье представлении, для пространственной задачи это удобнее

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\vec{q}^2}{2k_0} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) a(z, \vec{q}, t) = \frac{\kappa}{\sqrt{2LT}} p_A(z, \vec{q}, t), \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} x_A(z, \vec{q}, t) = \frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{LT}} \left(1 + \frac{\delta J_x(z, \vec{q}) \circ}{n_a \langle J_x^a \rangle} \right) \text{Im} [a(z, \vec{q}, t)], \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_A(z, \vec{q}, t) = 0. \quad (1.18)$$

Здесь знаком “ \circ ”, в целях сокращения записи, обозначена свертка по \vec{q} . Вследствие тривиальной эволюции атомной компоненты p_A у нас получились независимые уравнения для световой и атомной подсистем. Рассмотрим следующие начальные условия. Пусть центр атомного образца длины L находится в точке $z = 0$. Входное сигнальное поле $a^{in}(\vec{q}, t)$ сфокусировано также в начале координат. Решение уравнения (1.16) находится просто, но следует принимать во внимание, что простота эта является следствием сделанных приближений о неистоцимости опорного поля, которое мы спрятали в константу взаимодействия и, соответственно, считаем константой. Это отвечает приближению однократного рассеяния света на атомах и атомов на свете (в смысле изменения внутреннего состояния атомов), аналогично приближению Борна в физике столкновений. Тем самым атомная ячейка считается оптически тонкой по рассматриваемому взаимодействию. Другими словами, взаимодействие слабо и приводит к малому повороту поляризации света и атомного спина, что со-

храняет их большую классическую проекцию. Найденное решение для света:

$$a(z, \vec{q}, t) = a^{in}(\vec{q}, t) e^{-i\frac{\vec{q}^2}{2k_0}z} + \frac{\kappa}{\sqrt{2LT}} \int_{-L/2}^z dz' p_A^{in}(z', \vec{q}) e^{-i\frac{\vec{q}^2}{2k_0}(z-z')}, \quad (1.19)$$

где $p_A^{in}(z, \vec{q}) = p_A(z, \vec{q}, 0)$. Мы считаем длину импульса света много большей чем эффект запаздывания поля на длине атомного ансамбля $T \gg L/c$, поэтому пренебрегаем членами порядка z/c в приведенном решении. Первый член этого решения описывает распространение света в свободном пространстве, мнимая экспонента отвечает за набег фазы для волн с разными поперечными волновыми векторами \vec{q} , которые, соответственно, распространяются под разными углами к направлению $+z$. Этот набег фазы может быть компенсирован системой линз на выходе, мы учтем это чуть позже.

Далее, можно подставить найденное решение для света (1.19) в правую часть уравнения для спина (1.17) и решить его простым интегрированием.

$$x_A(z, \vec{q}, t) = x_A^{in}(z, \vec{q}) + \frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{LT}} \left(1 + \frac{\delta J_x(z, \vec{q}) \circ}{n_a \langle J_x^a \rangle} \right) \int_0^t dt' \text{Im} [a(z, \vec{q}, t')] \quad (1.20)$$

$$p_A(z, \vec{q}, t) = p_A^{in}(z, \vec{q}) \quad (1.21)$$

Нас интересует связь между входными и выходными каноническими переменными для света и атомов. Для света мы определим канонические переменные, усредненные по времени взаимодействия T :

$$x_L(z, \vec{q}) = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T dt \text{Re} [a(z, \vec{q}, t)], \quad p_L(z, \vec{q}) = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T dt \text{Im} [a(z, \vec{q}, t)]. \quad (1.22)$$

Это естественное определение, поскольку возмущение спиновой подсистемы коптит (т.е. интегрирует) сигнал во времени. Обмен состояниями между светом и атомами в этих переменных выглядит следующим образом (учтена

компенсация фазовых набегов для света при помощи линз).

$$x_L^{out}(\vec{q}) = x_L^{in}(\vec{q}) + \frac{\kappa}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dz' p_A^{in}(z', \vec{q}) \cos \frac{\vec{q}^2}{2k} z' \quad (1.23)$$

$$p_L^{out}(\vec{q}) = p_L^{in}(\vec{q}) + \frac{\kappa}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dz' p_A^{in}(z', \vec{q}) \sin \frac{\vec{q}^2}{2k} z' \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} x_A^{out}(z, \vec{q}) &= x_A^{in}(z, \vec{q}) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{L}} \left(1 + \frac{\delta J_x(z, \vec{q})^\circ}{n_a \langle J_x^a \rangle} \right) \left(p_L^{in}(\vec{q}) \cos \frac{\vec{q}^2 z}{2k} - x_L^{in}(\vec{q}) \sin \frac{\vec{q}^2 z}{2k} \right) - \\ &- \frac{1}{L} \left(1 + \frac{\delta J_x(z, \vec{q})^\circ}{n_a \langle J_x^a \rangle} \right) \int_{-L/2}^z dz' p_A^{in}(z', \vec{q}) \sin \frac{\vec{q}^2}{2k} (z - z') \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$p_A^{out}(z, \vec{q}) = p_A^{in}(z, \vec{q}) \quad (1.26)$$

Здесь верхним индексом (*in*) для света обозначено поле на входе в атомный образец, усредненное по времени взаимодействия T как в (1.22), а индексом (*out*) поле на выходе $x_L^{out}(\vec{q}) = x_L(L/2, \vec{q})$ с учетом компенсации фазовых набегов с помощью линз.

Полученные уравнения учитывают эффект дифракции и поэтому заметно отличаются от уравнений для одномодовой задачи [50]. Можно сказать что, все дополнительные члены, содержащие синус, являются нежелательными, поскольку нарушают требуемое взаимодействие. Например, последний член уравнения (1.25) описывает процесс самозаписи P квадратуры спинов в X вследствие дифракции света, что нежелательно, так как требуется достичь обмена состояниями между светом и атомами, а не смешивать переменные каждой из подсистем.

Чтобы упростить задачу и не учитывать нежелательную дифракцию, мы при заданной длине слоя атомов L ограничимся значениями пространственной частоты $q \ll q_{dif}$, где $Lq_{dif}^2/2k \sim 1$. Это означает, что рассматриваются

наблюдаемые, сглаженные по площадкам усреднения, много большим S_{dif} , где $\sqrt{S_{dif}} \sim \pi/q_{dif}$. При распространении сглаженного таким образом сигнала поля в слое, дифракционное размытие его деталей много меньше их поперечного размера, и дифракцией можно пренебречь. В решениях для амплитуд атомного момента положим $\cos(Lq^2/2k) = 1$, $\sin(Lq^2/2k) = 0$, что значительно упрощает их вид.

В отсутствие дифракции можно принять, что атомный слой является сколь угодно тонким, и ввести двумерную плотность амплитуд атомного момента $J_i(\vec{\rho})$, такую что

$$J_i(z, \vec{\rho}) = \delta(z)J_i(\vec{\rho}). \quad (1.27)$$

В этом случае, взятие интеграла по z в полученных уравнениях не составляет труда. Введем атомные переменные усредненные по продольной координате

$$x_A(\vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_L dz x_A(z, \vec{q}), \quad p_A(\vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_L dz p_A(z, \vec{q}). \quad (1.28)$$

Обмен состояниями между светом и атомами для тонкого слоя выглядит следующим образом

$$x_L^{out}(\vec{q}) = x_L^{in}(\vec{q}) + \kappa p_A^{in}(\vec{q}) \quad (1.29)$$

$$p_L^{out}(\vec{q}) = p_L^{in}(\vec{q}) \quad (1.30)$$

$$x_A^{out}(\vec{q}) = x_A^{in}(\vec{q}) + \kappa \left(1 + \frac{\delta J_x(\vec{q})_\circ}{n \langle J_x^a \rangle} \right) p_L^{in}(\vec{q}) \quad (1.31)$$

$$p_A^{out}(\vec{q}) = p_A^{in}(\vec{q}) \quad (1.32)$$

Упрощенные уравнения для тонкого слоя и полный цикл записи-считывания для тонкой квантовой голограммы обсудим в следующей главе.

Глава 2

Тонкая квантовая голограмма

Долгоживущие спиновые степени свободы протяженных атомных ансамблей, которые до сих пор использовались лишь для одномодовой памяти [50], при подавленном (с помощью лазерного охлаждения) поступательном движении подходят и для квантовых голограмм, так как способны сохранять множество пространственных мод, что выгодно отличает их от памяти на одном атоме. В отличие от одномодового случая, пространственный профиль входного изображения может быть произвольным и в общем случае неизвестен наблюдателю. На классическом уровне поле конкретного изображения задано произвольной суперпозицией ортогональных пространственных мод. Идеальная квантовая память хранит и выдает при считывании входное изображение, сохраняя во всех деталях квантовые состояния всех пространственных мод.

Здесь мы рассматриваем схему квантовой памяти на основе фарадеевского взаимодействия, в которой для обмена квантовыми состояниями между светом и атомами свет дважды посылается в ячейку памяти. Физически такая схема может работать с достаточно короткими световыми импульсами. Предполагается, что линия задержки может задержать световой импульс настолько, что оба прохода через ячейку разделены во времени. Мы обсуждаем свойства тонкой квантовой голограммы в области ближнего поля в терминах ортогональных пространственных мод, ассоциированных с пикселями.

Материал этой главы излагается по следующему плану. Сначала рассматриваются эволюция световых и атомных переменных для тонкого атомного слоя с учетом флуктуаций атомной плотности. Затем находим матрицу корреляции шумов для когерентного начального состояния атомов и считыва-

ющего света. Рассматриваются шумы возникающие по причине случайного распределения атомов. Далее исследуется верность записи-считывания при использовании широкополосного сжатого света для считывания. Наконец, приводится оценка для зашумления через рассеяние антисжатой квадратуры света на флуктуациях плотности.

2.1. Развитие полевых и атомных переменных

Оба этапа полного цикла (запись квантового состояния светового импульса на атомы и последующее считывание) описываются одинаково – как обмен квантовыми состояниями. Схема записи тонкой квантовой голограммы изображена на рис. 2.1.

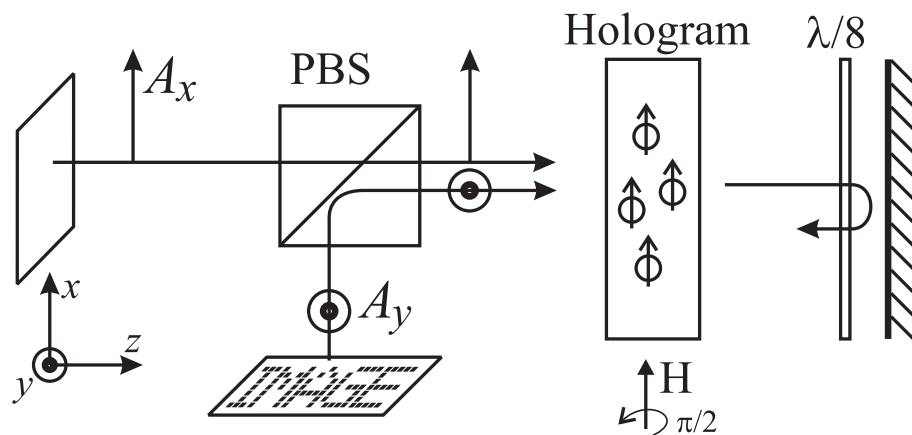


Рис. 2.1. Схема записи тонкой квантовой голограммы.

Воспользуемся результатами предыдущей главы и будем считать атомный ансамбль тонким слоем. Тогда развитие световой и атомной подсистем в результате взаимодействия при первом проходе (с упрощениями тонкого

слоя) описывается следующим образом:

$$X_L^{W(1)}(\vec{\rho}) = X_L^{W(in)}(\vec{\rho}) + \kappa P_A^{W(in)}(\vec{\rho}) \quad (2.1)$$

$$P_L^{W(1)}(\vec{\rho}) = P_L^{W(in)}(\vec{\rho}) \quad (2.2)$$

$$X_A^{W(1)}(\vec{\rho}) = X_A^{W(in)}(\vec{\rho}) + \kappa P_L^{W(in)}(\vec{\rho}) \left(1 + \frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n\langle J_x \rangle} \right) \quad (2.3)$$

$$P_A^{W(1)}(\vec{\rho}) = P_A^{W(in)}(\vec{\rho}) \quad (2.4)$$

Верхний значок W (write) с индексом (1) при переменных системы указывает, что рассматривается первый этап записи. Это уравнения из предыдущей главы в координатном представлении (1.29) – (1.32).

Напомним, определения использованные в предыдущей главе. Канонические переменные для спинов отличаются от введенных выше отсутствием зависимости от продольной координаты z , по которой произведено интегрирование.

$$X_A(\vec{\rho}) = \frac{J_y(\vec{\rho})}{\sqrt{n\langle J_x^a \rangle}}, \quad P_A(\vec{\rho}) = \frac{J_z(\vec{\rho})}{\sqrt{n\langle J_x^a \rangle}}, \quad (2.5)$$

так что их коммутатор, усредненный по положению атомов, имеет “почти” канонический вид:

$$\overline{[X_A(\vec{\rho}), P_A(\vec{\rho}')] } = i\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \left(1 + \frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n\langle J_x^a \rangle} \right), \quad (2.6)$$

здесь n обозначает поверхностную плотность атомов. Канонические переменные для поля удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям и определены равенствами

$$X_L(\vec{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_T dt X(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_T dt \frac{A_y^{in}(\vec{\rho}, t) + A_y^{in\dagger}(\vec{\rho}, t)}{\sqrt{2}}, \quad (2.7)$$

$$P_L(\vec{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_T dt P(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_T dt \frac{A_y^{in}(\vec{\rho}, t) - A_y^{in\dagger}(\vec{\rho}, t)}{i\sqrt{2}}.$$

Уравнение (2.3) описывает вращение спинов за счет световых сдвигов, а уравнение (2.1) описывает фарадеевское вращение плоскости поляризации

света при первом проходе. Константа взаимодействия для работы памяти должна быть равна единице.

Рассмотрим второе прохождение сигнальной волны. Перед зеркалом установлена вертикально ориентированная анизотропная пластинка $\lambda/8$, так что при двукратном прохождении (до и после отражения светового импульса) она действует как пластинка $\lambda/4$. В результате сигнальное y -поляризованное поле приобретает фазовый сдвиг относительно опорного поля $A_y \rightarrow iA_y$ и квадратурные компоненты поворачиваются на $\pi/2$. Одновременно спины атомов также поворачиваются на $\pi/2$ (световым импульсом круговой поляризации или импульсом вертикально направленного магнитного поля). Полное преобразование переменных на этом этапе записи дается соотношениями

$$X_A^{W(2)} = -P_A^{W(1)}, \quad (2.8)$$

$$P_A^{W(2)} = X_A^{W(1)}, \quad (2.9)$$

$$X_L^{W(2)} = -P_L^{W(1)}, \quad (2.10)$$

$$P_L^{W(2)} = X_L^{W(1)}. \quad (2.11)$$

Запись завершается тем, что свет снова проходит через атомный слой и взаимодействует с ним. Заключительное преобразование переменных системы такое же, как при первом проходе, см. (2.1) – (2.4), и имеет вид

$$X_L^{W(out)}(\vec{\rho}) = X_L^{W(2)}(\vec{\rho}) + \kappa P_A^{W(2)}(\vec{\rho}), \quad (2.12)$$

$$P_L^{W(out)}(\vec{\rho}) = P_L^{W(2)}(\vec{\rho}), \quad (2.13)$$

$$X_A^{W(out)}(\vec{\rho}) = X_A^{W(2)}(\vec{\rho}) + \kappa P_L^{W(2)}(\vec{\rho}) \left(1 + \frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n \langle J_x \rangle} \right), \quad (2.14)$$

$$P_A^{W(out)}(\vec{\rho}) = P_A^{W(2)}(\vec{\rho}). \quad (2.15)$$

Связь выходных переменных с входными для этапа записи (т.е. для полного обмена состояниями между светом и атомами) находится через последова-

тельный учет соотношений (2.1) – (2.15):

$$X_L^{W(out)}(\vec{\rho}) = X_A^{W(in)}(\vec{\rho}) + P_L^{W(in)}(\vec{\rho}) \frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n\langle J_x \rangle}, \quad (2.16)$$

$$P_L^{W(out)}(\vec{\rho}) = P_A^{W(in)}(\vec{\rho}) + X_L^{W(in)}(\vec{\rho}), \quad (2.17)$$

$$X_A^{W(out)}(\vec{\rho}) = X_L^{W(in)}(\vec{\rho}) + \left(X_L^{W(in)}(\vec{\rho}) + P_A^{W(in)}(\vec{\rho}) \right) \frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n\langle J_x \rangle}, \quad (2.18)$$

$$P_A^{W(out)}(\vec{\rho}) = P_L^{W(in)}(\vec{\rho}) + X_A^{W(in)}(\vec{\rho}) + P_L^{W(in)}(\vec{\rho}) \frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n\langle J_x \rangle}. \quad (2.19)$$

Чтобы происходил перенос квантового состояния, коэффициент связи κ здесь принят равным единице.

Результат записи состояния света в общем случае зависит от начального состояния атомов, что нежелательно. Из последнего уравнения выше видно, что начальная флуктуация коллективного спина не проявляется и запись с высокой верностью возможна, если квадратура $X_A^{W(in)}(\vec{\rho})$ флуктуаций спина много меньше, чем для когерентного состояния, т.е. вначале спины приготовлены в сжатом состоянии.

Рассмотрим считывание состояния квантовой памяти, куда ранее было записано состояние света. При этом на атомную ячейку посылается считывающая световая волна в поляризации y (вместе с сильной опорной в поляризации x) и снова происходит обмен квантовым состоянием. Этот обмен описывается такими же соотношениями, как (2.16) – (2.19), где при полевых и атомных переменных следует заменить верхний значок W (write) на R (readout). Из таких же соображений, как и выше, получаем, что для считывания с высокой верностью следует применять свет, сжатый по квадратуре $X_L^{W(in)}(\vec{\rho})$.

2.2. Верность записи – считывания без использования сжатых состояний

Обсудим вначале простой (не оптимальный) протокол записи и считывания состояния световой волны в пространственно – многомодовом когерентном состоянии. Примем, что:

а) при записи коллективный спин находится в когерентном “вакуумном” состоянии,

б) считывающая волна, поляризованная по y , также является вакуумной.

Это означает, что

$$\begin{aligned} X_A^{W(in)}(\vec{\rho}) &= X_A^{vac}(\vec{\rho}), \\ P_A^{W(in)}(\vec{\rho}) &= P_A^{vac}(\vec{\rho}), \\ X_L^{R(in)}(\vec{\rho}) &= X_L^{vac}(\vec{\rho}), \\ P_L^{R(in)}(\vec{\rho}) &= P_L^{vac}(\vec{\rho}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Подставляя эти начальные значения в уравнения (2.16) – (2.19), описывающие запись, и в аналогичные им соотношения для считывания (см. выше), находим связь переменных световой волны на входе и на выходе схемы квантовой памяти:

$$\begin{aligned} X_L^{R(out)}(\vec{\rho}) &= X_L^{W(in)}(\vec{\rho}) + F_X(\vec{\rho}), \\ P_L^{R(out)}(\vec{\rho}) &= P_L^{W(in)}(\vec{\rho}) + F_P(\vec{\rho}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Соотношение (2.21) такое же, как в случае голографической телепортации [10]. Вклады шумов, вносимых при записи и считывании, имеют вид

$$F_X(\vec{\rho}) = \left(X_L^{W(in)}(\vec{\rho}) + P_L^{vac}(\vec{\rho}) + P_A^{vac}(\vec{\rho}) \right) \frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n \langle J_x \rangle}, \quad (2.22)$$

$$F_P(\vec{\rho}) = X_A^{vac}(\vec{\rho}) + X_L^{vac}(\vec{\rho}) + P_L^{W(in)}(\vec{\rho}) \frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n \langle J_x \rangle}. \quad (2.23)$$

Пусть записываемое состояние света выбирается из ансамбля когерентных состояний, тогда входное поле представимо в виде суммы классического среднего поля $\alpha(\vec{\rho}) = \alpha_X(\vec{\rho}) + i\alpha_P(\vec{\rho})$ и флуктуации с такими же статистическими свойствами, как у квантового поля в вакуумном состоянии,

$$\begin{aligned} X_L^{W(in)}(\vec{\rho}) &= \sqrt{2}\alpha_X(\vec{\rho}) + \Delta X_L(\vec{\rho}), \\ P_L^{W(in)}(\vec{\rho}) &= \sqrt{2}\alpha_P(\vec{\rho}) + \Delta P_L(\vec{\rho}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Рассмотрим поле, усредненное по поверхности S_i квадратного пиксела площадью S . Усредненные амплитуды шума и матрица корреляции вводятся как

$$F_{X,P}(i) = \frac{1}{\sqrt{S}} \int_{S_i} d\vec{\rho} F_{X,P}(\vec{\rho}), \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} C^X(i, j) &= \langle F_X(i)F_X(j) \rangle, \\ C^P(i, j) &= \langle F_P(i)F_P(j) \rangle. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Верность телепортации когерентного состояния света на определенном наборе из N пикселов выражается [10] через матрицу корреляции следующим образом

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{\det(\delta_{ij} + C^X(i, j)) \det(\delta_{ij} + C^P(i, j))}}. \quad (2.27)$$

Напомним, что квадратурные амплитуды в нашем описании определены как

$$X_L(\vec{\rho}) = \sqrt{2}\text{Re } a(\vec{\rho}), \quad P_L(\vec{\rho}) = \sqrt{2}\text{Im } a(\vec{\rho}). \quad (2.28)$$

В статье по голографической телепортации [10] было принято другое определение, там квадратурные амплитуды в больше в $\sqrt{2}$, а элементы матрицы корреляции – в 2 раза, чем здесь. Это учтено при записи (2.27).

Предельные флуктуации записи – чтения в основном порождаются квантовыми флуктуациями коллективного спина и считывающего света. В расче-

те матрицы корреляции учтем, что квадратуры всех вакуумных полей, усредненных по поверхности пиксела, имеют одинаковую дисперсию, например,

$$\langle X_L^{vac}(i)X_L^{vac}(i) \rangle = \frac{1}{2}. \quad (2.29)$$

Флуктуации расположения атомов также уменьшают верность квантовой памяти. Поскольку расчет вклада этих флуктуаций нетривиален, выделим для него отдельный подраздел.

2.2.1. Влияние флуктуаций плотности атомов

При независимом случайном расположении атомов в поперечной плоскости коррелятор макроскопической x – проекции спина имеет вид (см. Приложение Б)

$$\overline{\delta J_x(\vec{\rho})\delta J_x(\vec{\rho}')} = n\langle J_x^{a2} \rangle \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}'). \quad (2.30)$$

Рассмотрим вклад в матрицу корреляции шумов пропорциональных $\delta J_x(\vec{\rho})$, здесь мы рассматриваем только один вклад, а также опускаем матрицу корреляции для второй квадратуры, так как они вычисляются аналогично

$$C^X(i, i) \sim \frac{1}{(n\langle J_x^a \rangle)^2 S} \int_{S_i} d\vec{\rho} d\vec{\rho}' \langle X_L^{W(in)}(\vec{\rho})X_L^{W(in)}(\vec{\rho}') \rangle \overline{\delta J_x(\vec{\rho})\delta J_x(\vec{\rho}')} = \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{nS} \int_{S_i} d\vec{\rho} \langle X_L^{W(in)}(\vec{\rho})^2 \rangle.$$

Здесь использовано свойство дельта-коррелированности флуктуаций плотности атомов, также из этого свойства флуктуаций атомной плотности следует отсутствие кросс-корреляций между разными пикселями, то есть $C^X(i, j) = 0$ для $i \neq j$.

Важным следствием соотношения (2.31) является то, что описание в терминах “пиксельных” переменных не является замкнутым и матрица корреляции флуктуационных вкладов зависит от мелкомасштабных флуктуаций

полевых и атомных переменных. Для вкладов, порожденных случайностью расположения атомов, можно предложить следующую физическую интерпретацию.

Дельта-коррелированная случайная часть пространственной плотности атомов перемешивает взаимодействующие распределения (световые и атомные) подобно случайной дифракционной решетке, что явно видно из выражений для вкладов шумов (2.22, 2.23), записанных в представлении Фурье:

$$f_X(\vec{q}) = \int \frac{d\vec{q}'}{(2\pi)^2} \left(x_L^{W(in)}(\vec{q}') + p_L^{vac}(\vec{q}') + p_A^{vac}(\vec{q}') \right) \frac{\delta j_x(\vec{q} - \vec{q}')}{n \langle J_x \rangle}. \quad (2.32)$$

В решетке представлены все пространственные гармоники с одинаковым статистическим весом, где среднеквадратичная амплитуда гармоник $\sim 1/\sqrt{n}$. Это означает, что каким бы ни было “рассеиваемое” поле (регулярная часть поля сигнала, квантовая флуктуация сигнала), все его гармоники будут, во-первых, хаотизированы, и, во-вторых, направлены на данный пиксел с равной вероятностью. Фактически степень зашумления результата записи на данном пикселе определяется интегральным по поверхности пиксела потоком энергии рассеиваемых полей (включая потоки вакуумных флуктуаций) в конусе направлений, которые мы имеем право удерживать в нашей теории.

Вполне определенный вид шумовых вкладов этого происхождения мы можем получить только для классической составляющей поля записываемого сигнала. Полагая, что сигнал находится в пространственно многомодовом когерентном состоянии с амплитудой $\alpha(\vec{\rho}) = \alpha_X(\vec{\rho}) + i\alpha_P(\vec{\rho})$, где $\alpha_X(\vec{\rho})$ и $\alpha_P(\vec{\rho})$ – вещественные амплитуды, выделяем вклад классической составляющей (см. (2.24)) как показано ниже,

$$\langle X_L^{W(in)}(\vec{\rho})^2 \rangle = 2\alpha_X^2(\vec{\rho}) + \langle \Delta X_L^2(\vec{\rho}) \rangle. \quad (2.33)$$

Вклад классической составляющей также нужно усреднить по статистике

потока сигналов, возникает неравенство:

$$2\overline{\alpha_X^2(\vec{\rho})^s} \geq 2\left(\overline{\alpha_X(\vec{\rho})^s}\right)^2. \quad (2.34)$$

Неравенство показывает, что если классическое поле сильно неоднородно в пределах пиксела, зашумление пиксельной степени свободы атомного момента может быть значительно больше, чем вносит однородная пиксельная мода сигнального поля. Дополнительные (ортогональные пиксельной) моды сигнала с той же эффективностью увеличивают шум записи. Заметим, что одномерная модель не позволяет описать это дополнительное зашумление даже если учесть в ней флуктуацию числа атомов в объеме взаимодействия.

Физический вывод – фильтрация сигнала в Фурье-области и соответствующее сглаживание могут оказаться выгодными.

Положим, в духе принятой симметрии модели, что поток сигналов является однородным в поперечном сечении луча случайным процессом, т.е. все средние и корреляционные функции поля сигнала не зависят от сдвига поперечной координаты. Разумеется, конкретная реализация сигнала может быть неоднородна в пространстве. Флуктуационные вклады (2.31) в матрицу корреляции только от хаотизации классической части сигнала в сумме для обеих квадратур оцениваются как

$$\langle F_X^2(i) \rangle + \langle F_P^2(i) \rangle = \frac{2}{n} \overline{(\alpha_X^2(\vec{\rho}) + \alpha_P^2(\vec{\rho}))^s} = \frac{2}{n} \overline{|\alpha(\vec{\rho})|^{2s}}. \quad (2.35)$$

Получен простой результат: с учетом нормировки поля, такой что $T\langle A^\dagger A \rangle$ есть число фотонов на см^2 за время T , в правой части (2.35) возникло отношение поверхностной плотности числа сигнальных фотонов в цикле записи (в см^{-2}) к поверхностной плотности числа атомов.

Для оценки вклада квантовых флуктуаций когерентного сигнала необходимо явно ввести ограничение на полосу пространственных частот, которую мы можем учитывать в нашем описании. Входящую в (2.31) плотность пото-

ка вакуумных флуктуаций представим, используя вещественность величины $\Delta X_L(\vec{\rho})$, в виде

$$\langle \Delta X_L^2(\vec{\rho} = 0) \rangle = \int \frac{d\vec{q}d\vec{q}'}{(2\pi)^4} \langle \Delta x_L(\vec{q}) \Delta x_L^\dagger(\vec{q}') \rangle. \quad (2.36)$$

Рассмотрим, используя определение канонической переменной, среднее несколько более общего вида. Для усреднения по когерентному состоянию операторы поля следует привести к нормально упорядоченному виду, что дает

$$\begin{aligned} \langle x_L(\vec{q}) x_L^\dagger(\vec{q}') \rangle &= \frac{1}{2} \langle (a(\vec{q}) - a^\dagger(-\vec{q})) (a^\dagger(\vec{q}') - a(-\vec{q}')) \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\alpha(\vec{q}) - \alpha^*(-\vec{q})) (\alpha^*(\vec{q}') - \alpha(-\vec{q}'))^* + \frac{1}{2} [a(\vec{q}), a^\dagger(\vec{q}')]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Здесь первый вклад происходит от классического сигнала с амплитудой $\alpha(\vec{\rho})$ и уже учтен выше, а второй порожден квантовыми флуктуациями когерентного состояния. Используя коммутационное соотношение

$$[a(\vec{q}), a^\dagger(\vec{q}')] = (2\pi)^2 \delta(\vec{q} - \vec{q}'), \quad (2.38)$$

получаем

$$\langle \Delta x_L(\vec{q}) \Delta x_L^\dagger(\vec{q}') \rangle = \frac{1}{2} (2\pi)^2 \delta(\vec{q} - \vec{q}'). \quad (2.39)$$

Подставляя это соотношение в (2.36) и затем в (2.31), находим вклад квантовых флуктуаций входного сигнала, находящегося в широкополосном когерентном состоянии, в матрицу корреляции:

$$C^X(i, i) \sim \frac{1}{2n \langle J_x^a \rangle} \int_{|q_{x,y}| < q_c} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} = \frac{1}{2n \langle J_x^a \rangle S_c}. \quad (2.40)$$

Так как интегрирование по пространственным частотам входного сигнала должно быть ограничено некоторой предельной частотой, которую мы обозначим q_c , удобно ввести площадь когерентности для квантовых флуктуаций сигнала $S_c \sim (\pi/q_c)^2$. Оценить введенную площадь можно из различных соображений. Например, в параксиальном приближении мы должны считать

$S_c \gg \lambda^2$. Пренебрегая дифракцией, мы можем получить более конкретное ограничение, связанное с толщиной слоя. Но надеяться на такие ограничение нельзя, т.к. если мы не сумели описать вклад наклонных волн с $q \sim k_0$ в своей теории, это не значит, что его нет в эксперименте. Более надежно считать $S_c \sim \lambda^2$ и исходить из оценки

$$C^X(i, i) \sim \frac{1}{n\lambda^2}. \quad (2.41)$$

Чтобы пренебрегать данным источником шума, необходимо иметь много атомов на площадке λ^2 . Аналогичные вычисления позволяют получить все вклады вносимые флуктуацией атомной плотности в матрицу корреляции.

2.2.2. Матрица корреляции шума

Подведем итог данного раздела. Мы рассмотрели начальное условие, когда спины ориентированы по x и находятся в широкополосном когерентном (аналогичном вакуумному) состоянии. Входной сигнал также предполагается в широкополосном когерентном состоянии. Предположим дополнительно, что энергия классической части входного сигнала в среднем (в потоке сигналов) поровну распределена между X и P квадратурами. Шумы, добавленные к исходному сигналу, в результате полного цикла записи-считывания, описываются диагональными элементами матрицы корреляции:

$$\begin{aligned} C^X(i, i) &= \frac{\overline{N}_{ph}^s}{n} + 3 \cdot O\left(\frac{1}{n\lambda^2}\right), \\ C^P(i, i) &= 1 + \frac{\overline{N}_{ph}^s}{n} + O\left(\frac{1}{n\lambda^2}\right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Здесь $\overline{N}_{ph}^s = \overline{|\alpha(\vec{\rho})|^2}^s$ – средняя поверхностная плотность фотонов в записываемом когерентном сигнале. Чем интенсивнее сигнал, тем больше шума вносит его рассеяние на флуктуациях плотности атомов. Вклады, записанные как $O(1/n\lambda^2)$ происходят от начальных вакуумных флуктуаций коллективного

спина и считывающего поля, а также от квантовых флуктуаций когерентного сигнала. Как подробно выяснялось выше, рассеяние всех этих флуктуаций на флуктуациях плотности атомов приводит к дополнительному зашумлению канонических переменных, которые мы ввели для “пиксельных” степеней свободы.

В пределе большой поверхностной плотности n числа атомов можно пренебречь флуктуациями атомной плотности. Верность записи-считывания для одного пиксела равна

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71. \quad (2.43)$$

2.3. Оптимизация верности квантовой памяти

2.3.1. Считывание с использованием света в сжатом состоянии

Интересно вычислить верность записи-считывания с использованием сжатых состояний света и атомов, так как это позволяет достичь максимальной верности (максимальной емкости памяти). Напишем выражение для шумовой добавки в случае применения сжатых состояний спина для записи и сжатых состояний света для считывания:

$$\begin{aligned} X_A^{W(in)}(\vec{\rho}) &= X_A^{sq}(\vec{\rho}), \\ P_A^{W(in)}(\vec{\rho}) &= P_A^{sq}(\vec{\rho}), \\ X_L^{R(in)}(\vec{\rho}) &= X_L^{sq}(\vec{\rho}), \\ P_L^{R(in)}(\vec{\rho}) &= P_L^{sq}(\vec{\rho}). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Предполагаем что записываемое состояния света выбирается из ансамбля когерентных состояний. Тогда

$$\begin{aligned} F_X(\vec{\rho}) &= \left(\sqrt{2}\alpha_X(\vec{\rho}) + \delta X_L^{W(in)}(\vec{\rho}) + P_L^{sq}(\vec{\rho}) + P_A^{sq}(\vec{\rho}) \right) \frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n\langle J_x \rangle} \\ F_P(\vec{\rho}) &= X_A^{sq}(\vec{\rho}) + X_L^{sq}(\vec{\rho}) + \left(\sqrt{2}\alpha_P(\vec{\rho}) + \delta P_L^{W(vac)}(\vec{\rho}) \right) \frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n\langle J_x \rangle} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Спиновое сжатое состояние с первого взгляда не имеет какого-то характерного пространственного масштаба и может рассматриваться даже для одного атома. Тем не менее, пространственный масштаб возникает и здесь. Дело в том, что мы пользуемся приближением малых отклонений состояний коллективного спина от “северного полюса” сферы Блоха. Если для заданного размера пиксела (который определяет число атомов на пиксел и радиус сферы Блоха коллективного спина на пикселе) и для заданной степени сжатия выполняется условие применимости данного приближения, то с уменьшением размера пиксела радиус сферы Блоха уменьшается как число атомов – пропорционально площади пиксела. В то же время при сохранении неизменной степени сжатия (на языке квадратур) имеем $J_x \sim X_A \sqrt{n}$, $J_y \sim P_A \sqrt{n}$, то есть характерное отклонение спина от “северного полюса” пропорционально линейному размеру пиксела.

Таким образом, для заданной степени сжатия существует минимально допустимый размер пиксела, для которого сжатое состояние спинов подобно сжатому состоянию поля. Напомним, что данная модель квантовой памяти вся основана на приближенном соответствии пространства состояний поля и коллективного спина.

Сжатые спиновые состояния рассматривать пока не будем по причине неясной зависимости от пространственного масштаба. Как и в предыдущем разделе, для коллективного спина ограничимся начальным когерентным состоянием. При этом в уравнениях (2.45) флуктуации атомных квадратур X_A , P_A берутся вакуумными.

Вычислим вклады в матрицу корреляции (2.26), которые определяются пространственно многомодовым сжатым состоянием считывающей световой волны. Предполагаем, что непосредственно перед входной поверхностью ячейки с атомами помещен плоский слой нелинейной среды с восприимчивостью второго порядка, который освещается классической плоской волной

накачки на удвоенной частоте. На выходе кристалла возникает волна усиленного спонтанного параметрического рассеяния в сжатом состоянии. Для определенности считаем, что осуществлено попутное вырожденное согласование волн.

Как видно из (2.45), можно надеяться на существенное уменьшение флуктуации $F_P(\vec{\rho})$ за счет сжатия квадратурной амплитуды $X_L^{sq}(\vec{\rho})$.

Негативным эффектом сжатия явится усиление сопряженной амплитуды $P_L^{sq}(\vec{\rho})$. Эта амплитуда дает вклад в $F_X(\vec{\rho})$ за счет рассеяния на флуктуациях плотности. Рассмотрим сначала верность записи-считывания поля в когерентном состоянии при однородном распределении атомов в поперечном сечении, а влияние флуктуаций плотности атомов при считывании сжатым светом оценим в следующем разделе.

Выделим вклад в элемент матрицы корреляции шума $C^P(i, j) = \langle F_P^\dagger(i) F_P(j) \rangle^1$, который может быть уменьшен при оптимально выбранной фазе сжатия:

$$\begin{aligned}
C^{P(sq)}(i, j) &= \langle X_L^{(sq)\dagger}(i) X_L^{(sq)}(j) \rangle = \tag{2.46} \\
&= \frac{1}{ST} \int_S d\vec{\rho}' d\vec{\rho}'' \int_T dt' dt'' \langle X_L^{(sq)\dagger}(\vec{\rho}' + \vec{\rho}_i, t') X_L^{(sq)}(\vec{\rho}'' + \vec{\rho}_j, t'') \rangle = \\
&= \frac{1}{ST} \int_S d\vec{\rho}' d\vec{\rho}'' \int_T dt' dt'' \int \frac{d\vec{q}' d\vec{q}''}{(2\pi)^4} \int \frac{d\Omega' d\Omega''}{(2\pi)^2} \times \\
&= \left\{ \exp[i(-\vec{q}'(\vec{\rho}' + \vec{\rho}_i) + \vec{q}''(\vec{\rho}'' + \vec{\rho}_j) + \Omega't' - \Omega''t'')] \langle X_L^\dagger(\vec{q}', \Omega') X_L(\vec{q}'', \Omega'') \rangle \right\}.
\end{aligned}$$

Матрица $\langle X_L^{(sq)\dagger}(i) X_L^{(sq)}(j) \rangle$ корреляции квадратурных компонент сжатого света, усредненных по объему наблюдения (площадь пиксела и время накопления) определяет шумы, верность, информационную емкость и т. д. в

¹ хотя квадратурные амплитуды шума вещественны, для согласования со стандартным расчетом корреляционных функций полей удобно ввести сопряжение

ряде задач, решенных ранее для оптических изображений: гомодинный прием, телепортация и телеклонирование, плотное кодирование. Хотя матрица корреляции уже вычислялась для условий этих задач, мы для связности изложения приводим в Приложении В расчет величин $\langle X_L^{(sq)\dagger}(i)X_L^{(sq)}(j) \rangle$ и $\langle P_L^{(sq)\dagger}(i)P_L^{(sq)}(j) \rangle$, опираясь на работы [10, 60].

Верность F_1 записи-считывания для поля на одном пикселе находится через диагональные элементы матрицы корреляции. В отсутствие флуктуаций атомной плотности и сжатия коллективного спина атомов выполняется $C^X(i, i) = 0$, и

$$C^P(i, i) = \langle X_A^{vac}(i)X_A^{vac}(i) \rangle + \langle X_L^{(sq)}(i)X_L^{(sq)}(i) \rangle = \frac{1}{2} + C^{P(sq)}(i, i). \quad (2.47)$$

На рис. 2.2a и 2.2b приведены результаты расчета величины $C^{P(sq)}(i, i)$ и верности F_1 , найденной согласно (2.27) для одного пиксела. Верность существенно зависит от отношения линейного размера пиксела $\Delta = \sqrt{S}$ к характерному размеру площади когерентности пространственно многомодового сжатого света. Этот размер формируется дифракцией в слое нелинейного кристалла, где происходит эффективное усиление спонтанного параметрического рассеяния. При умеренном сжатии удобный масштаб в поперечном направлении, связанный с дифракцией, дается длиной $l_d \sim \sqrt{l/2k}$, где k – волновой вектор света в кристалле (см. раздел 2.3.2). Зависимости на рис. 2.2a, 2.2b построены в логарифмическом масштабе как функции от $D = \Delta/l_d$.

В [10] исследовалась верность телепортации квантового состояния поля на простых массивах из одного, двух и четырех пикселов. Полученные там результаты качественно указывают на степенную зависимость верности от числа N пикселов. Ввиду этого для большого массива была введена средняя верность на пиксел, определяемая как

$$F_{av} = \sqrt[N]{F_N}.$$

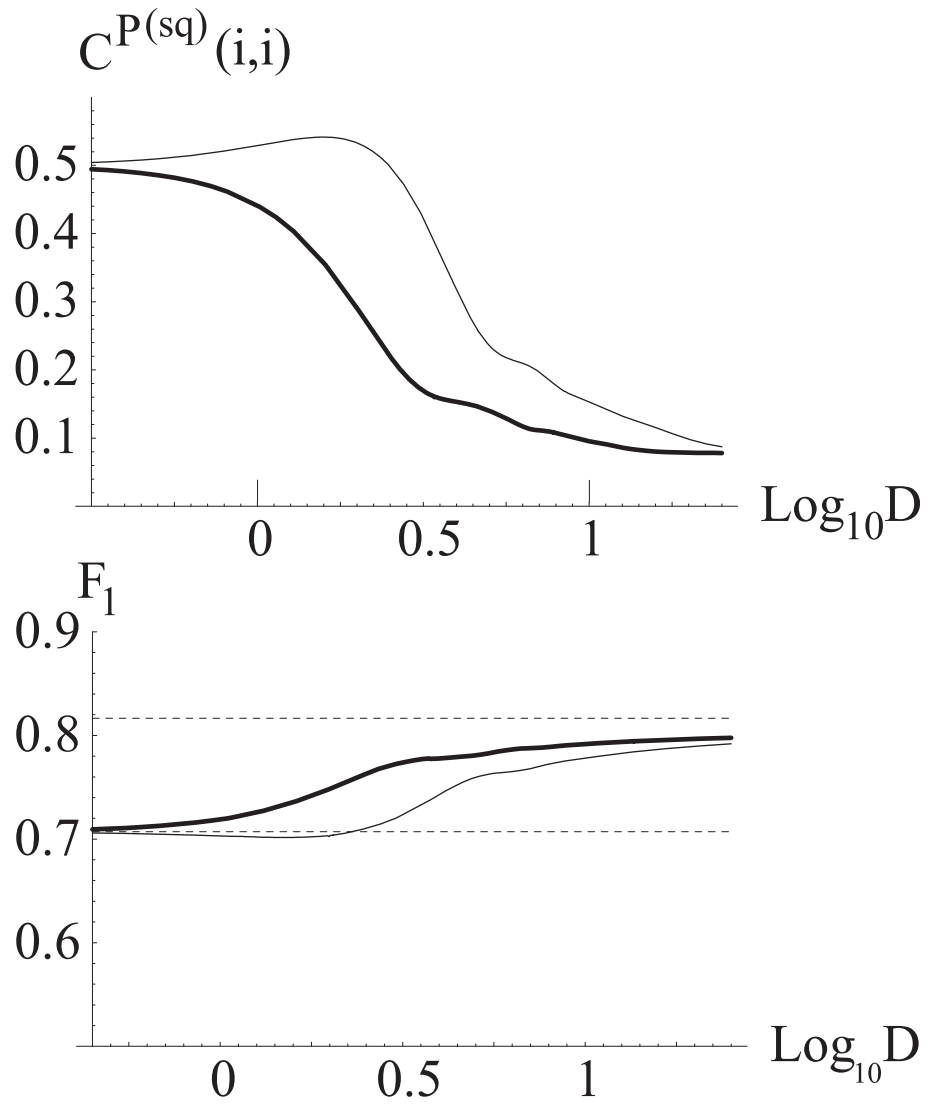


Рис. 2.2. Элемент матрицы корреляции шума и верность записи-чтения для одного пиксела (жирная и тонкая линия – с коррекцией фазы сжатия с помощью тонкой линзы и без нее). Степень и фазовый угол сжатия есть $\exp[r(0,0)] = 3$, $\psi(0,0) = \pi/2$.

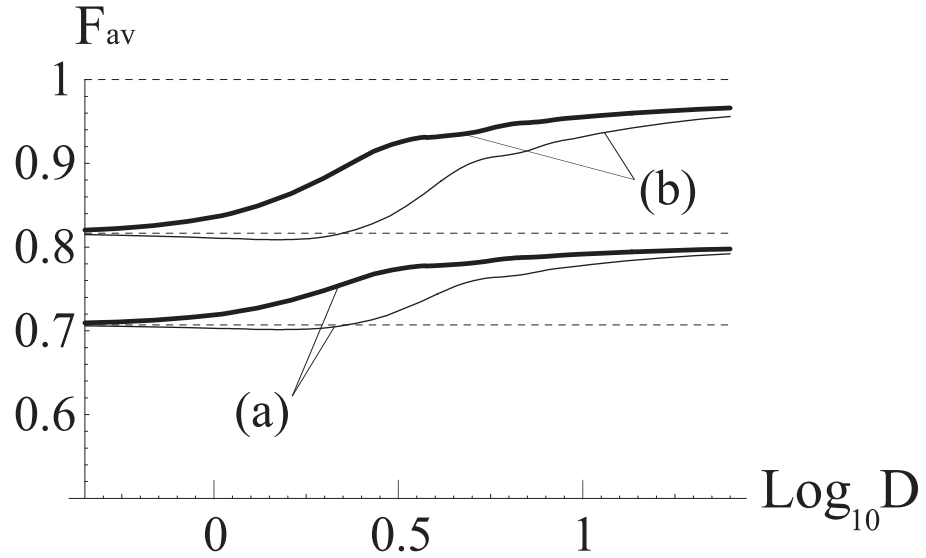


Рис. 2.3. Средняя верность на пиксел для начального когерентного (а) и идеально сжатого (б) состояний коллективного атомного спина. Параметры сжатого света те же что и на Рис. 2.2.

На большом массиве квадратных пикселей матрицу корреляции можно диагонализировать так же, как это делается в теории регулярных структур в физике. Собственными векторами матрицы $\langle X_L^{(sq)\dagger}(i)X_L^{(sq)}(j) \rangle$ являются суммы по пикселям, обладающие квантованным “волновым вектором”. Матрица пикселей задает шаг дискретности волнового вектора своим линейным размером, а предельный собственный вектор – размером “кристаллической ячейки”, то есть пикселя. Средняя верность на пиксел была найдена в бакалаврском дипломе Васильева Д.В. и в [10]. Для полноты изложения мы намечаем соответствующий вывод в Приложении Г.

На рис. 2.3 приведен график F_{av} в зависимости от отношения размера пикселя к длине когерентности. Верхний предел $F_{av} = \sqrt{2/3} = 0,82$ достижим при идеальном сжатии света для больших пикселей $\sqrt{S} \gg l_d$, когда верность лимитируется только вакуумными шумами начального состояния атомных спинов. Нижний предел $F_{av} = \sqrt{1/2} = 0,71$ отвечает случаю несжатых спинов и света, достигается для маленьких пикселей, когда сжатие света

перестает оказывать влияние. Для идеально сжатых коллективного спина и считывающего света достижима идеальная верность $F_{av} = 1$ в пределе больших пикселей (кривая (b)). Таким образом, тонкая квантовая голограмма позволяет превзойти верность для лучшей классической памяти $1/2$ [52] и верность идеальной гауссовой клонирующей машины $2/3$ [54], впрочем как и верность не-гауссового клонирования для когерентных состояний $0,6826$ [55]. Результаты данного раздела опубликованы в [16].

2.3.2. Влияние флуктуаций плотности атомов

Шумы записи-считывания сжатым светом описываются выражениями (2.45). Основной эффект сжатия, не зависящий от флуктуаций атомной плотности, рассмотрен в предыдущем разделе. Негативный эффект сжатия связан с рассеянием усиленной квадратуры считывающего поля $P_L^{(sq)}$ на флуктуациях плотности атомов. В оценках, приведенных в конце раздела 2.2, по новому выглядит только вклад в элемент матрицы корреляции

$$C^X(i, i) \sim \frac{1}{(n\langle J_x^a \rangle)^2 S} \int_{S_i} d\vec{\rho} d\vec{\rho}' \langle P_L^{(sq)}(\vec{\rho}) P_L^{(sq)}(\vec{\rho}') \rangle \overline{\delta J_x(\vec{\rho}) \delta J_x(\vec{\rho}')} = \quad (2.48)$$

$$\frac{1}{nS} \int_{S_i} d\vec{\rho} \langle P_L^{(sq)2}(\vec{\rho}) \rangle = \frac{1}{n} \langle P_L^{(sq)2}(0) \rangle.$$

Здесь использовано свойство (2.30) дельта-коррелированности флуктуаций плотности атомов, а также то, что в нашей модели все элементы схемы поперечно однородны. Величина $\langle P_L^{(sq)2}(0) \rangle$ есть удвоенная плотность потока фотонов в усиленной квадратуре сжатого света.

Удобно ввести следующую качественную картину. Известно, что при сжатии одного осциллятора поля среднее число фотонов есть $\langle n \rangle = |V|^2 \sim \exp(2r)/4$. В пространственно многомодовом свете независимым осциллятором поля можно сопоставить поля на площадках когерентности S_{coh} . Средняя

плотность потока фотонов оценивается как $\langle n \rangle / S_{coh} \sim \exp(2r) / 4S_{coh}$, а оценка (2.48) дает

$$C^X(i, i) \sim \frac{1}{2nS_{coh}} e^{2r}. \quad (2.49)$$

Наметим несколько более точные рассуждения. Используя вид (B.9) корреляционной функции усиленной квадратуры в представлении Фурье, приводим (2.48) к виду

$$C^X(i, i) \sim \frac{1}{n} \int \frac{d\vec{q} d\vec{q}'}{(2\pi)^4} \langle P_L^{(sq)\dagger}(\vec{q}) P_L^{(sq)}(\vec{q}') \rangle = \frac{1}{n} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} G_P(\vec{q}). \quad (2.50)$$

Заметим, что в силу $\lim_{q \rightarrow \infty} G_P(\vec{q}) = 1$ полученное выражение расходится, если в нем не ввести обрезание по пространственной частоте на естественном для этой частоты пределе $q \sim 2\pi/\lambda$. Разумно также отделить в полученном выражении вклад реального излучения – усиленного параметрического рассеяния, которое существует только в полосе частот эффективного сжатия, от вклада вакуумного “фона” флуктуаций $P_L^{(sq)}$, который находится с помощью обрезания выше. Оценка вакуумного вклада уже была дана в разделе 2.2, и мы приводим (2.50) к виду

$$C^X(i, i) \sim \frac{1}{2n} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} [G_P(\vec{q}) - 1] + O\left(\frac{1}{n\lambda^2}\right). \quad (2.51)$$

Вклад усиленного параметрического рассеяния можно представить как

$$C^X(i, i) \sim \frac{1}{2n} \frac{(2q_{max})^2}{(2\pi)^2} e^{2r}, \quad (2.52)$$

где функция Грина заменена своей оценкой, а интеграл – эффективной площадью интегрирования, которая в свою очередь оценена через максимальную пространственную частоту q_{max} в спектре сжатия. При умеренном сжатии численный анализ зависимости функции Грина от пространственной частоты показывает, что разумную величину для параметра q_{max} и соответствующего пространственного масштаба l_d дает дифракционная оценка

$$q_{max} \sim \sqrt{\frac{2k}{l}}, \quad l_d = 1/q_{max} = \sqrt{\frac{l}{2k}}, \quad (2.53)$$

где l – длина нелинейного кристалла. В частности, если принять это значение q_{max} в (2.52), то относительное отличие от результата численного интегрирования в (2.51) составляет $0.2 \dots 0.3$.

Сравнивая (2.49) с (2.52), получаем для площади когерентности

$$S_{coh} \sim (\pi/q_{max})^2. \quad (2.54)$$

Для нелинейного кристалла длиной $l = 3$ мм при длине волны $\lambda = 0,712$ мкм имеем $l_d \sim 13$ мкм [10].

Диагональный элемент матрицы корреляции шума, добавленного к X_L квадратуре поля сигнала в результате записи-считывания с использованием сжатого света, выглядит следующим образом:

$$C^X(i, i) = \frac{\overline{N}_{ph}^s}{n} + O\left(\frac{e^{2r}}{nl\lambda}\right) + 3 \cdot O\left(\frac{1}{n\lambda^2}\right). \quad (2.55)$$

По сравнению с ранее полученным результатом для вакуумного считывающего поля (2.42) добавился вклад, происходящий от рассеяния антисжатой квадратуры света на неоднородностях атомного слоя. Матрица корреляции данной квадратурной амплитуды осталась диагональной, поскольку флуктуации атомной плотности на разных пикселях независимы.

Глава 3

Тонкая голограмма с использованием обратной связи

3.1. Введение

В главе 2 была изучена схема записи и считывания тонкой квантовой голограммы, в которой используется квантовое неразрушающее взаимодействие на двух проходах сигнальной световой волны через слой вещества. Этот протокол можно рассматривать как обобщение на пространственно многомодовый случай схемы [61], предложенной для одномодовой памяти.

В данной главе рассматривается другая схема параллельной квантовой памяти на основе тонкой голограммы, в которой в процессе записи для воздействия на атомный ансамбль используется неразрушающее взаимодействие на одном проходе света, измерение поляризационных параметров прошедшей световой волны и управляющая обратная связь на атомы. В пространственно одномодовом случае обратная связь может быть осуществлена через вращение спинов во вспомогательном магнитном поле. Такая схема с обратной связью была предложена и реализована в [50]. Однако указанным способом невозможно осуществить модуляцию управляющего сигнала с разрешением в пространстве, достаточным для записи в память оптического изображения. Поэтому мы рассматриваем здесь схему, в которой обратная связь осуществляется через неразрушающее взаимодействие с управляющей световой волной, промодулированной сигналом обратной связи. Рассмотрены квантовые флуктуации, возникающие в данной схеме квантовой памяти для света, и показано, что она в принципе позволяет записывать с высокой верностью квантовое состояние светового поля, содержащего много пространственных

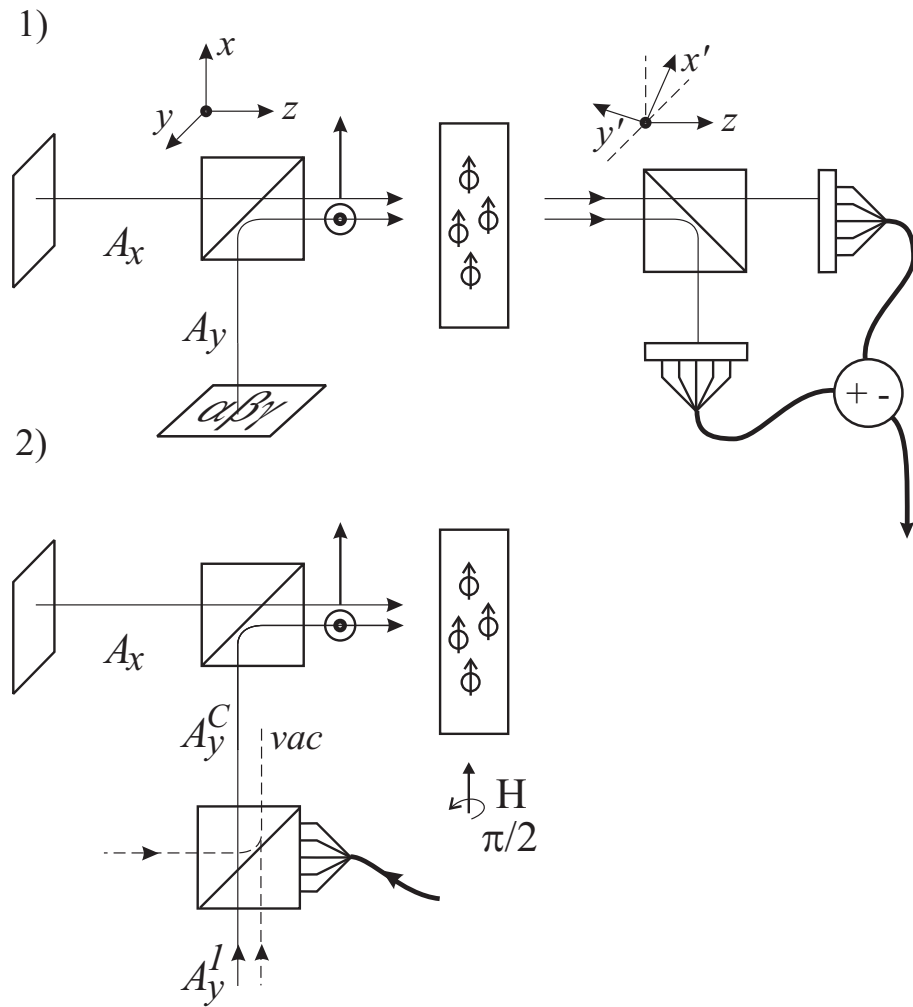


Рис. 3.1. Два этапа записи квантовой голограммы с помощью неразрушающего взаимодействия: первый проход света и измерение (1), второй проход с использованием обратной связи (2).

степеней свободы – пикселей (если имеется в виду описание поля в ближней зоне).

Схема, иллюстрирующая процесс записи квантовой голограммы, изображена на рис. 3.1.

Мы рассматриваем все тот же ансамбль случайно расположенных атомов со спином $1/2$ в основном и возбужденном состояниях. Долгоживущий спин основного состояния атома \vec{J}^a изначально ориентирован в вертикальном направлении x . Классическая нерезонансная x -поляризованная плоская волна с частотой ω_0 и медленно меняющейся амплитудой A_x (которую считаем

вещественной) распространяется направо в направлении z . Входной сигнал представлен слабым квантованным y -поляризованным полем с амплитудой $A_y(\vec{r}, t) \ll A_x$ и той же несущей частотой и средним направлением распространения. Взаимодействие световой и атомной подсистемы в параксиальном приближении описано в главе 1. Мы воспользуемся решениями (1.29) – (1.32) уравнений распространения применительно к тонкому слою, как в предыдущей главе.

Напомним, определения использованные в предыдущей главе. Канонические переменные для спинов определены как

$$X_A(\vec{\rho}) = \frac{J_y(\vec{\rho})}{\sqrt{n\langle J_x^a \rangle}}, \quad P_A(\vec{\rho}) = \frac{J_z(\vec{\rho})}{\sqrt{n\langle J_x^a \rangle}}, \quad (3.1)$$

их коммутатор, усредненный по положению атомов, имеет, вследствие пространственных флуктуаций атомной плотности (приложение Б), “почти” канонический вид:

$$\overline{[X_A(\vec{\rho}), P_A(\vec{\rho}')] } = i\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \left(1 + \frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n\langle J_x^a \rangle} \right), \quad (3.2)$$

здесь n обозначает поверхностную плотность атомов. Канонические переменные для поля удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям и определены равенствами

$$X_L(\vec{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_T dt X(\vec{\rho}, t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_T dt \operatorname{Re}[A_y^{in}(\vec{\rho}, t)], \quad (3.3)$$

$$P_L(\vec{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_T dt P(\vec{\rho}, t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_T dt \operatorname{Im}[A_y^{in}(\vec{\rho}, t)],$$

$$[X_L(\vec{\rho}), P_L(\vec{\rho}')] = i\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}'). \quad (3.4)$$

3.2. Запись и считывание с использованием обратной связи

Запись в квантовую память и считывание из нее может производиться различными способами. Мы уже рассматривали двухпроходную схему (глава 2 и [16]), когда при записи сигнальная волна дважды направляется в атомный ансамбль. После первого прохода света атомный спин поворачивается на угол $\pi/2$ вокруг оси x , а состояние поляризации сигнала меняется с помощью анизотропной пластинки, так чтобы при втором проходе взаимодействовали другие канонические переменные света и атомов. При этом достигается обмен квантовыми состояниями между полем и веществом с точностью до аддитивного шума. Считывание производится повторением этой процедуры обмена.

В эксперименте [50], в котором была реализована пространственно одномодовая квантовая память, вместо второго прохода света через атомы использовалась обратная связь на атомы через вспомогательное магнитное поле. Сигнал обратной связи определялся результатом измерения поляризации света, прошедшего через атомный ансамбль. Такой вид обратной связи не подходит для пространственно многомодовой памяти, так как он не позволяет воздействовать на атомы с высоким пространственным разрешением, необходимым для записи оптического изображения. Ниже мы рассматриваем обратную связь через световую волну, когда указанное ограничение снимается.

Квантовая запись света достигается в три этапа: (1) квантовое неразрушающее взаимодействие сигнальной световой волны с атомами на одном проходе через атомный слой; (2) измерение с пространственным разрешением поляризации прошедшего света, вращение спинов на угол $\pi/2$ вокруг оси x и приготовление поперечно модулированной вспомогательной световой волны; и (3) неразрушающее взаимодействие вспомогательной волны с атомами

на втором проходе.

Преобразование атомных и световых переменных за время записи T в результате прохода света через тонкий (такой, что можно пренебречь дифракцией) слой состоит во взаимном вращении векторов Стокса и спинового момента нижнего уровня вокруг продольной оси [50, 61]. Учитывая поперечную протяженность системы, имеем (см. уравнения (2.1) – (2.4)):

$$\begin{aligned}
X_L^{W(1)}(\vec{\rho}) &= X_L^{W(in)}(\vec{\rho}) + \kappa P_A^{W(in)}(\vec{\rho}), \\
P_L^{W(1)}(\vec{\rho}) &= P_L^{W(in)}(\vec{\rho}), \\
X_A^{W(1)}(\vec{\rho}) &= X_A^{W(in)}(\vec{\rho}) + \kappa P_L^{W(in)}(\vec{\rho}) \left(1 + \frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n \langle J_x^a \rangle} \right), \\
P_A^{W(1)}(\vec{\rho}) &= P_A^{W(in)}(\vec{\rho}).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь верхние значки (1) и W отмечают величины, относящиеся к первому этапу записи. Константа взаимодействия представляется в виде $\kappa^2 = \alpha_0 \eta = 1$, где α_0 резонансная оптическая плотность и η вероятность спонтанного излучения за время записи T в расчете на атом [62]. Поскольку условие $\eta \ll 1$ необходимо чтобы пренебречь спонтанным излучением, то должно удовлетворяться другое обычное условие $\alpha_0 = \lambda^2 n / 2\pi \gg 1$.

В правой части выражения для $X_A^{W(1)}(\vec{\rho})$ выше, имеется вклад, который учитывает флуктуации атомной плотности в поперечном сечении. Эти флуктуации приводят к тому, что локальное значение классической x -компоненты коллективного спина может отличаться от среднего значения. После малого вращения спина вокруг оси z возникающий отклик наблюдаемой $J_y(\vec{\rho})$ начинает зависеть от флуктуации атомной плотности. Влияние этой флуктуации зависит от плотности атомов и площади пиксела S . Для случайного расположения атомов имеем

$$\frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n \langle J_x^a \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{nS}}.$$

При выполнении условий $\lambda^2 n / 2\pi \gg 1$ и $S \gg L\lambda$, где $L \gg \lambda$, число атомов

на пикселе велико и мы можем пренебречь влиянием флуктуаций атомной плотности (см. приложение Б).

Результатом взаимодействия атомов и света является запись $P^{W(in)}$ квадратурных амплитуд атомов (света) на $X^{W(1)}$ квадратурные амплитуды света (атомов). Для полной записи квантового состояния необходимо осуществить перенос квадратурных амплитуд $X^{W(in)}$.

С этой целью после прохода сигнального поля через атомный ансамбль с помощью симметричного гомодинного детектора измеряется (с необходимым пространственным разрешением) возмущенная $X_L^{W(1)}(\vec{\rho})$ квадратурная амплитуда света, которая пропорциональна y -компоненте вектора Стокса,

$$S_y(\vec{r}, t) = A_x [A_y(\vec{r}, t) + A_y^\dagger(\vec{r}, t)],$$

накопленной за время T . По определению параметров Стокса, которые имеют смысл разностей интенсивностей при наблюдении в трех дополнительных базисах, для этого измеряется и копится во времени разность интенсивностей волн, линейно поляризованных в базисе (x', y') , повернутом на $\pi/4$ относительно базиса (x, y) ,

$$X_L^M(\vec{\rho}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2A_x^2 T}} S_y^M(\vec{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{2A_x^2 T}} \int_T dt A_x [A_y(\vec{r}, t) + A_y^\dagger(\vec{r}, t)] = X_L^{W(1)}(\vec{\rho}).$$

После измерения все спины поворачиваются вокруг оси x на угол $\pi/2$, так чтобы получить $X_A^{W(2)} = -P_A^{W(1)}$, $P_A^{W(2)} = X_A^{W(1)}$ (верхний индекс (2) обозначает величины, относящиеся к данному этапу управляющего воздействия). Это делается с помощью $\pi/2$ импульса вспомогательного магнитного поля, направленного вдоль x .

Далее создается управляющее поле с квадратурной амплитудой $P_L^C(\vec{\rho}) \sim X_L^M(\vec{\rho})$, которое направляется в атомный слой на втором проходе излучения и передает измеренную амплитуду $X_L^M(\vec{\rho})$ в наблюдаемую $X_A^{W(2)}(\vec{\rho})$ при неразрушающем взаимодействии с атомами.

Управляющее поле с заданной примесью круговой поляризации, которая необходима для вращения спинов, можно получить, смешивая на поляризационном делителе опорное сильное классическое поле x -поляризации и относительно слабую (но все же достаточно сильную, чтобы можно было считать ее близкой к классической) световую волну y -поляризации, сдвинутую по фазе на $\pi/2$ относительно опорной. Амплитуда слабой волны модулируется в поперечном сечении значением вещественной измеренной наблюдаемой $X_L^M(\vec{\rho})$, так что при этом модуляция накладывается на управляющую квадратурную компоненту полного поля.

Чтобы подавить вклад вакуумных флуктуаций управляющего поля в y -поляризации, нужно уменьшить константу или время взаимодействия. Например, можно отстроить управляющее поле дальше от резонанса с электронным переходом. Таким образом, взаимодействие будет определяться константой взаимодействия κ_2 и (или) временем взаимодействия T_2 . В результате действия управляющего поля атомные переменные преобразуются, с учетом (3.5), от своих исходных значений $X_A^{W(2)}(\vec{\rho})$ к конечным $X_A^{W(out)}(\vec{\rho})$ согласно

$$\begin{aligned} X_A^{W(out)}(\vec{\rho}) &= X_A^{W(2)}(\vec{\rho}) + \kappa_2 P_L^C(\vec{\rho}), \\ P_A^{W(out)}(\vec{\rho}) &= P_A^{W(2)}(\vec{\rho}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Первое соотношение выше показывает, что на квадратурную амплитуду атомного момента $X_A^{W(out)}(\vec{\rho})$ перенесена переменная входного поля $X_L^{W(in)}(\vec{\rho})$. На амплитуду атомного момента $P_A^{W(out)}(\vec{\rho})$ ранее в результате прямого взаимодействия (3.5) была записана переменная входного поля $P_L^{W(in)}(\vec{\rho})$.

Обсудим более подробно квантовые флуктуации управляющего сигнала. Для его создания на вход 1 добротного зеркала делителя направляется плоская лазерная волна y -поляризации с амплитудой $A_y^1 + A_y^{1(vac)}(\vec{\rho}, t)$. Здесь вклад $A_y^{1(vac)}(\vec{\rho}, t)$ учитывает минимальные квантовые флуктуации амплитуды, которые отвечают полю в когерентном состоянии Глаубера. Зеркало де-

лителя описывается управляемыми амплитудными коэффициентами пропускания поля $\tau(\vec{\rho})$ (со входа 1) и $\rho(\vec{\rho})$ (со входа 2). Со стороны неосвещенного холостого входа 2 на тот же выход в y -поляризации поступает поле вакуумных флуктуаций $A_y^{2(vac)}(\vec{\rho}, t)$. Коэффициенты пропускания связаны условием унитарности $|\tau(\vec{\rho})|^2 + |\rho(\vec{\rho})|^2 = 1$. Для определенности считаем, что коэффициент пропускания вещественный и его значение задается с помощью обратной связи так, что оно пропорционально измеренному сигналу,

$$\tau(\vec{\rho}) = \beta X_L^M(\vec{\rho}).$$

Классическую амплитуду падающей волны на поляризационном смесителе возьмем в виде $A_y^1 = i|A_y^1|$, что означает сдвиг по фазе на $\pi/2$ относительно опорной волны A_x . Управляющее поле есть

$$A_y^C(\vec{\rho}, t) = \tau(\vec{\rho}) \left[A_y^1 + A_y^{1(vac)}(\vec{\rho}, t) \right] + \rho(\vec{\rho}) A_y^{2(vac)}(\vec{\rho}, t). \quad (3.7)$$

Легко проверить, что, как следствие унитарности, поле (3.7) удовлетворяет коммутационному соотношению для свободных полей, а его флуктуационная часть является вакуумной (проверяется в действии на начальное вакуумное состояние полей $A_y^{1,2(vac)}(\vec{\rho}, t)$). Таким образом, усредненные по времени взаимодействия T_2 канонические переменные управляющего поля есть

$$\begin{aligned} X_L^C(\vec{\rho}) &= X_L^{C(vac)}(\vec{\rho}), \\ P_L^C(\vec{\rho}) &= gX_L^M(\vec{\rho}) + P_L^{C(vac)}(\vec{\rho}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $g = \sqrt{2T_2}A_y^1\beta$.

Так как квантовая голограмма обладает конечным пространственным разрешением и наше рассмотрение проводится в параксиальном приближении, необходимо ввести процедуру сглаживания в поперечном сечении световой волны. Для описания поля в ближней зоне мы связываем ортогональные пространственные моды с амплитудами полей, усредненных по поверхности

S_i квадратных пикселей площади S , $i = 1, \dots, N$. Усредненные квадратурные амплитуды P управляющего поля (т.е. канонические переменные для пикселей) вводятся как

$$P_L^C(i) = \frac{1}{\sqrt{S}} \int_{S_i} d\vec{\rho} P_L^C(\vec{\rho}), \quad (3.9)$$

и аналогично для X . Используя (3.4), для усредненной таким образом вакуумной флуктуации управляющей квадратурной амплитуды находим:

$$\langle P_L^{C(vac)}(\vec{\rho}) P_L^{C(vac)}(\vec{\rho}') \rangle = \frac{1}{2} \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}'), \quad \langle P_L^{C(vac)}(i) P_L^{C(vac)}(j) \rangle = \frac{1}{2} \delta_{i,j}. \quad (3.10)$$

В (3.8) вклад флуктуационной части управляющей амплитуды $P_L^C(i)$ (взятый в среднеквадратичном смысле), отнесенный к среднему значению той же амплитуды, оценивается как

$$1/2 \sqrt{ST_2 \overline{(A_y^C)^2}}. \quad (3.11)$$

Здесь $A_y^C \sim \beta X_L^M(\vec{\rho}) A_y^1$. В знаменателе этого отношения стоит корень из числа фотонов y -поляризации управляющего поля, находящихся в среднем в объеме усреднения ST_2 . Если данная компонента управляющего поля не является слишком слабой (ее параметр вырождения много больше единицы), вакуумная флуктуация относительно мала. Такая оценка типична для случаев, когда имеется суперпозиция сигнала и вакуумных флуктуаций. Так как оценка зависит от времени и площади усреднения, здесь возникает ограничение пространственного разрешения модели, порождаемое фотонным шумом. Это ограничение, как ясно из сказанного, может быть снято увеличением интенсивности управляющего поля (или сжатием его амплитуды P).

Приведем в явном виде вклады в квадратурные амплитуды атомного момента после окончания процедуры записи. Для этого соотношения (3.5), (3.8) с учетом сделанного поворота спина подставим в результат (3.6), что

дает

$$\begin{aligned} X_A^{W(out)}(\vec{\rho}) &= \kappa_2 g X_L^{W(in)}(\vec{\rho}) + (\kappa \kappa_2 g - 1) P_A^{W(in)}(\vec{\rho}) + \kappa_2 P_L^{Cvac}(\vec{\rho}), \\ P_A^{W(out)}(\vec{\rho}) &= X_A^{W(in)}(\vec{\rho}) + \kappa P_L^{W(in)}(\vec{\rho}). \end{aligned}$$

Обмен значениями наблюдаемых между светом и атомами, т.е. память, достигается при таком согласовании констант, когда $\kappa = 1$ и $\kappa_2 g = 1$. При этом происходит компенсация начальной флуктуации атомной P -квадратуры. Неидеальность записи связана с тем, что: а) в атомной квадратуре P сохраняется значение начальной флуктуации сопряженной атомной квадратуры X , и б) в атомную квадратуру X по цепи обратной связи проникает вклад вакуумных флуктуаций управляющего поля, малость которого определяется величиной (3.11).

Целью протокола квантовой памяти является перенос входного квантового состояния света на стадии записи на выходное состояние света на этапе считывания. Выше мы описали запись в квантовую память. Точно таким же способом, только с заменой света на атомы и наоборот, осуществляется считывание. Это приведет к проникновению дополнительных шумов от начальных флуктуаций X квадратуры считывающего света, а также шумов обратной связи. Как уже упоминалось, качество памяти на этапе записи можно повысить используя атомы в сжатом спиновом состоянии (с подавленной флуктуацией X квадратуры), то же самое относится к стадии считывания – можно использовать считывающий свет в сжатом состоянии. Степень влияния сжатия считывающего света на полный цикл записи-считывания нами была изучена в разделе 2.3.

Перенос состояния света на атомы (без считывания) представляет самостоятельный интерес для осуществления квантовых логических операций на степенях свободы вещества, то есть для обработки квантовой информации. Рассмотрим верность записи в квантовую память. При оптимальном согла-

совании параметров записи, когда $\kappa = 1$ и $\kappa_2 g = 1$, атомные канонические переменные в расчете на пиксел (т. е. усредненные аналогично (3.9)) представляются в виде

$$\begin{aligned} X_A^{W(out)}(i) &= X_L^{W(in)}(i) + F_X(i), \\ P_A^{W(out)}(i) &= P_L^{W(in)}(i) + F_P(i). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Соотношения (3.12) аналогичны тем, что описывают квантовую голографическую телепортацию оптического изображения [10, 60, 63]. Однако явный вид шумовых вкладов является специфичным для нашей модели памяти:

$$F_X(i) = \frac{1}{g} P_L^{C(vac)}(i), \quad F_P(i) = X_A^{W(in)}(i). \quad (3.13)$$

Как следует из (3.13), вакуумные флуктуации управляющего поля подавляются тем эффективнее, чем больше коэффициент передачи обратной связи по сравнению с единицей, $g \gg 1$.

Качество передачи квантового состояния $|\psi^{(in)}\rangle \rightarrow |\psi^{(out)}\rangle$ характеризуется параметром верности (fidelity) $F = |\langle \psi^{(in)} | \psi^{(out)} \rangle|^2$. Предположим, что записываемое поле находится в пространственно многомодовом когерентном состоянии. Для изображения, представленного суперпозицией полей на N пикселях, верность в этом случае дается выражением [10]

$$F_N = [\det(\delta_{ij} + C^X(i, j)) \det(\delta_{ij} + C^P(i, j))]^{-1/2},$$

где матрицы корреляции шума определены как

$$C^X(i, j) = \langle F_X(i) F_X(j) \rangle, \quad C^P(i, j) = \langle F_P(i) F_P(j) \rangle.$$

Как показано в [10], верность переноса квантового состояния для простых многопиксельных массивов масштабируется приблизительно как N -ая степень величины $F_{av} = (F_N)^{1/N}$, называемой средней верностью на пиксел.

Если квантовое состояние пространственных мод коллективного спина до записи является вакуумным, то, аналогично (3.10), имеем $C^P(i, j) = \frac{1}{2}\delta_{i,j}$, и средняя верность записи есть

$$F_{av} = [(1 + 1/2g)(1 + 1/2)]^{-1/2}.$$

В пределе эффективной обратной связи вкладом вакуумных флуктуаций управляющего поля можно пренебречь, и верхний предел верности записи в квантовую память есть $F_{av} = \sqrt{2/3} = 0,82$. Это выше классического предела для записи когерентных состояний, который, согласно [52], равен $1/2$. При использовании идеально сжатых по квадратуре X начальных состояний пространственных мод коллективного спина достигается совершенная передача квантового состояния света на атомный ансамбль, $F_{av} = 1$. Результаты этой главы опубликованы в [17].

Глава 4

Объемная квантовая голограмма

Данная глава посвящена изучению нового типа пространственно многомодовой квантовой памяти – объемной квантовой голограммы. Исследование тонкой голограммы в предыдущих главах, позволяет выделить несколько слабых мест предложенных протоколов. Во-первых, требуется два прохода света для записи или считывания информации, это накладывает ограничение на длину импульса. Импульс должен быть как можно короче, но в то же время ширина спектра импульса должна быть много меньше отстройки от резонанса, чтобы наша модель оставалась верна. Таким образом, оценивая отстройку как 1 ГГц, приходим к допустимой ширине спектра 100 МГц, что дает длину импульса 10 нс и, соответственно, длину линии задержки 3 м. Это конечно терпимо и может поместиться в лаборатории, но все же неудобно. Во-вторых, мы нашли, что пространственное разрешение тонкой голограммы ограничено дифракцией света в атомном слое. В-третьих, для идеальной работы тонкой голограммы требуется сжатие начального состояния света и/или атомов. Объемная голограмма позволяет обойти эти ограничения: запись и считывание осуществляется за один проход, количество пространственных мод не ограничивается дифракцией, не требуется приготовление сжатых состояний атомной или световой подсистем.

Новая схема многомодовой квантовой памяти, которую мы называем объемной квантовой голограммой, основана на двух идеях. Первая идея исходит от объемной голограммы, предложенной Денисюком [64] в 1962 году для классической записи оптических изображений. Объемная голограмма записывается распространяющимися навстречу друг другу сигнальной и опорной волнами. Возникает две подрешетки, образованные интерферирующими вол-

нами в среде, каждая из них сохраняет одну квадратуру сигнального поля. Поскольку сохраняются обе квадратуры, то при считывании не возникает двух изображений (реального и мнимого), как в случае классической тонкой голограммы.

Вторая идея возникает из [65] где было показано, что квантовое неразрушающее взаимодействие (QND) в комбинации с постоянным магнитным полем, позволяет добиться взаимодействия обеих компонент коллективного спина атомов с двумя квадратурами света.

В данной главе мы предлагаем записывать объемную голограмму (что подразумевает геометрию встречных волн) на атомный ансамбль со спинами вращающимися в постоянном магнитном поле. Таким образом удастся симметрично вовлечь во взаимодействие все степени свободы атомов и света. Мы покажем, что входное состояние пространственно многомодового света может быть записано в объемную голограмму за один проход. Спектральная компонента $+\Omega$ сигнальной волны, сдвинутая по частоте на Ω относительно частоты опорной волны ω_0 , записывается на волну когерентности коллективного спина, которая распространяется в среде и имеет определенную фазовую скорость. Одновременно происходит квантовое перепутывание между спектральной компонентой сигнала $-\Omega$, сдвинутой по частоте в противоположную сторону, и волной спиновой когерентности, которая имеет фазовую скорость противоположного знака.

Наш анализ показывает, что объемная квантовая голограмма для момента основного состояния $J = 1/2$, если рассмотреть ее для частного пространственно одномодового случая, обладает рядом свойств, выявленных ранее [49] для моделей памяти с более сложными конфигурациями атомных состояний, где играют роль нелинейные взаимодействия в Λ -схемах атомных уровней (возникающих при $J > 1/2$). С качественной точки зрения это по-видимому можно понимать так, что увеличение эффективного числа степеней свободы

модели, достигаемое за счет геометрии встречных волн и возникновения спиновых подрешеток, проявляет себя подобно переходу к более сложной структуре уровней вещества, которая работает при записи квантового состояния светового сигнала в случае Λ -схем.

Глава организована следующим образом. Сначала мы обсудим основы модели и, поскольку рассматриваемая система заметно отличается от изучавшейся в предыдущих главах, заново выведем уравнения движения для света и атомов в параксиальном приближении используя усреднение по быстрым осцилляциям в пространстве и времени. Далее мы рассмотрим перенос входного многомодового квантового состояния сигнального поля на стадиях записи и считывания. В завершение главы приведем оценки числа мод для объемной и тонкой голограмм, а также дадим оценки реализуемости схемы объемной голограммы на практике.

4.1. Однопроходная объемная голограмма с пространственным разрешением

Схема работы объемной квантовой голограммы и структура атомных уровней изображены на Рис. 4.1. Мы рассматриваем ансамбль неподвижных, случайно распределенных атомов, для простоты, обладающих спином $J = 1/2$ в основном и возбужденном состояниях. Спин долгоживущего основного состояния атома изначально ориентирован по оси x вертикально, вдоль постоянного магнитного поля. Атомный спин вращается вокруг вертикальной оси с круговой частотой Ω . Классическое нерезонансное x -поляризованное поле с частотой ω_0 и медленной амплитудой A_x (предполагаем вещественной) распространяется в направлении $-z$. Входным сигналом является слабое квантованное y -поляризованное поле на той же частоте ω_0 , распространяющееся в направлении $+z$. Мы будем рассматривать это многомодовое входное

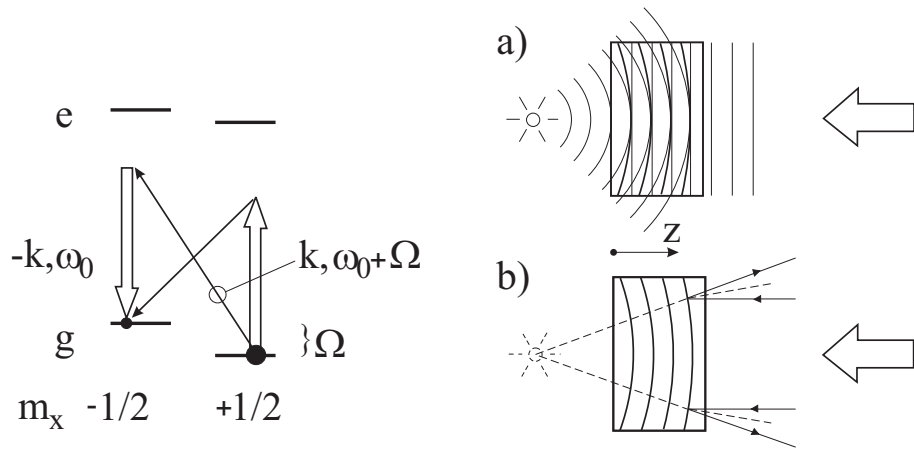


Рис. 4.1. Схемы структуры уровней и стадий записи (а) и считывания (б) объемной квантовой голограммы

поле с медленно меняющейся амплитудой $A_y(\vec{r}, t) \ll A_x$ в параксиальном приближении.

Для того, чтобы сконструировать гамильтониан взаимодействия встречных опорной и сигнальных волн с ансамблем спин-поляризованных атомов рассмотрим сначала атомный слой толщиной (в направлении z) меньше чем λ . В пределах этого слоя имеем постоянную разность фаз между сигнальным полем и опорной волной. Таким образом, взаимодействие внутри данного слоя описывается хорошо известным гамильтонианом квантового неразрушающего взаимодействия ([1] а также приложение А). Квантовое неразрушающее взаимодействие между светом и веществом порождает два основных эффекта: (а) фарадеевский поворот поляризации света, индуцированный продольной z -компонентой коллективного спина атомов, и (б) поворот атомного спина, вызванный неравными световыми сдвигами магнитных подуровней $m_z = \pm 1/2$ основного состояния при различающихся интенсивностях вкладов ортогональных круговых поляризаций в полную световую волну. Соответствующая часть гамильтониана записывается следующим образом ([1] и приложение А):

$$H = \frac{2\pi k_0 |d|^2}{\omega_{eg} - \omega_0} \int_V d\vec{r} \sum_a J_z^a(t) S_z(\vec{r}, t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a). \quad (4.1)$$

Здесь ω_{eg} есть частота невозмущенного атомного перехода, d – матричный элемент дипольного момента перехода и $k_0 = \omega_0 c$. Для встречных сигнальной и опорной волны, z -проекция вектора Стокса $S_z(\vec{r}, t) = 2A_x \text{Im} [A_y(\vec{r}, t) e^{i2k_0 z}]$ в уравнении (4.1) быстро (то есть на длине порядка λ) осциллирует вдоль z . Медленная амплитуда сигнального поля A_y определяется следующим образом

$$A_y(z, \vec{\rho}, t) = \int \frac{dk_z}{2\pi} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \sqrt{\omega(k)/k_0} a_y(\vec{k}) \exp[i(\vec{q} \cdot \vec{\rho} + (k_z - k_0)z - (\omega(k) - \omega_0)t)],$$

здесь $a_y(\vec{k})$ и $a_y^\dagger(\vec{k})$ есть операторы уничтожения и рождения фотонов с волновым вектором \vec{k} , которые удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям $[a_y(\vec{k}), a_y^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}')$, $[a_y(\vec{k}), a_y(\vec{k}')] = 0$. Используя эти коммутационные соотношения в параксиальном приближении можно получить [14] коммутационные соотношения для медленно меняющейся амплитуды квантованного поля A_y ,

$$[A_y(z, \vec{\rho}, t), A_y^\dagger(z', \vec{\rho}', t)] \equiv c \tilde{\delta}(\vec{r} - \vec{r}') \approx c \left(1 - \frac{i}{k_0} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2k_0^2} \nabla_\perp^2 \right) \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (4.2)$$

где $\vec{r} = (\vec{\rho}, z)$, $\vec{k} = (\vec{q}, k_z)$. Здесь мы не рассматриваем y -поляризованное квантованное поле, распространяющееся сонаправленно с опорной волной, потому что его эволюция протекает независимо от исследуемого поля (оно просто взаимодействует с ортогональной пространственной модой спинов).

Определим плотность коллективного спина следующим образом $\vec{J}(\vec{r}) = \sum_a \vec{J}^a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$. Рассмотрим коммутационное соотношение для y и z компонент коллективного спина, усредненное по случайным положениям атомов

$$\overline{[J_y(\vec{r}), J_z(\vec{r}')] } = i \sum_a \langle J_x^a \rangle \overline{\delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a)^a} = i n_a \langle J_x^a \rangle \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Здесь n_a есть средняя плотность атомов. Переменные, подобные полевым, для спиновой подсистемы,

$$B(\vec{r}, t) = \{J_y(\vec{r}, t) + iJ_z(\vec{r}, t)\} / \sqrt{2n_a \langle J_x^a \rangle},$$

удовлетворяют стандартному бозонному коммутационному соотношению:

$$\overline{[B(\vec{r}, t), B^\dagger(\vec{r}', t)]} = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (4.3)$$

Учитывая, что атомы изначально приготовлены в состоянии спин вверх, оператор B^\dagger можно рассматривать как оператор рождения атомов в состоянии спин вниз или как коллективный оператор проекции $|+1/2\rangle \rightarrow |-1/2\rangle$. В этой главе мы полностью пренебрегаем, изученной ранее, пространственной флуктуацией атомной плотности, так как ничего нового к уже сказанному добавить нечего: в пределе большой оптической плотности атомного образца можно пренебречь флуктуацией плотности.

Полный гамильтониан, описывающий нашу модель, включает в себя энергию свободного электромагнитного поля, взаимодействие атомных спинов с постоянным магнитным полем и эффективный гамильтониан квантового неразрушающего взаимодействия.

$$H = \int_V d\vec{r} \left\{ \frac{\hbar\omega_0}{c} A_y^\dagger(z, \vec{\rho}, t) A_y(z, \vec{\rho}, t) + \hbar\Omega B^\dagger(z, \vec{\rho}, t) B(z, \vec{\rho}, t) - \right. \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{\sqrt{2\pi}k_0|d|^2}{\omega_{eg} - \omega_0} \sqrt{n_a \langle J_x^a \rangle} A_x(z, t) [B(z, \vec{\rho}, t) - h.c.] [A_y(z, \vec{\rho}, t)e^{i2k_0z} - h.c.] \right\}.$$

Мы описываем эволюцию нашей системы в представлении Гейзенберга. Используя коммутационные соотношения (4.2) и (4.3) для поля и атомных переменных, после простых преобразований получаем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k_0} \nabla_\perp^2 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_y(z, \vec{\rho}, t) = \frac{\kappa}{\sqrt{LT}} \text{Im} B(z, \vec{\rho}, t) e^{-i2k_0z}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B(z, \vec{\rho}, t) = -i\Omega B(z, \vec{\rho}, t) + \frac{\kappa}{\sqrt{LT}} \text{Im} [A_y(z, \vec{\rho}, t) e^{i2k_0 z}]. \quad (4.6)$$

Здесь T это длительность импульса опорного поля, прямоугольной формы, а L длина атомного ансамбля. Безразмерная константа взаимодействия

$$\kappa = \frac{2\pi k_0 |d|^2}{\hbar(\omega_{eg} - \omega_0)} \sqrt{2n_a \langle J_x^a \rangle A_x^2 LT}, \quad (4.7)$$

должна быть порядка единицы, чтобы квантовая память работала эффективно. Константа взаимодействия может быть представлена в виде $\kappa^2 = \alpha_0 \eta$, где α_0 это резонансная оптическая плотность, а η есть вероятность спонтанного излучения [1]. Для того чтобы пренебречь эффектом спонтанного излучения с возбужденного атомного уровня, должно выполняться условие $\eta \ll 1$, поэтому стандартным требованием для эффективного квантового интерфейса является $\alpha_0 = \lambda^2 n_a L / 2\pi \gg 1$. Произведем Фурье преобразование по поперечной координате

$$a(z, \vec{q}, t) = \int d\vec{\rho} A_y(z, \vec{\rho}, t) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}}, \quad (4.8)$$

и аналогично для атомных переменных. Получаем систему уравнений, описывающих эволюцию нашей системы в Фурье представлении,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\vec{q}^2}{2k_0} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) a(z, \vec{q}, t) = \frac{\kappa}{\sqrt{LT}} \frac{1}{2i} [b(z, \vec{q}, t) - b^\dagger(z, -\vec{q}, t)] e^{-i2k_0 z}, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} b(z, \vec{q}, t) = -i\Omega b(z, \vec{q}, t) + \frac{\kappa}{\sqrt{LT}} \frac{1}{2i} [a(z, \vec{q}, t) e^{i2k_0 z} - a^\dagger(z, -\vec{q}, t) e^{-i2k_0 z}]. \quad (4.10)$$

Полевые и атомные амплитуды, рассмотренные выше, быстро осциллируют с частотой порядка Ω . Для дальнейшего изложения введем медленно меняющиеся амплитуды коллективного спина $b_{\pm k}(z, \vec{q}, t)$, во вращающейся с частотой Ω системе координат, и медленно меняющиеся амплитуды сигнального поля $a_{\pm \Omega}(z, \vec{q}, t)$ с несущей частотой, отстроенной от частоты опорного поля $\omega_0 \pm \Omega$.

Следует также учесть, что амплитуды поля определены как медленно меняющиеся вдоль оси z , но это не относится к спиновым амплитудам, что

видно из (4.10). Быстрая модуляция коллективного спина с продольной пространственной частотой $2k_0$ есть следствие встречной геометрии объемной голограммы. Тонкие атомные слои, обсуждавшиеся выше, имеют толщину порядка доли длины волны λ . Это накладывает ограничение на движение атомов в период хранения информации: атомы не должны переносить когерентность в соседний слой. Такое условие выполняется для твердотельного образца или сверх холодного атомного ансамбля. Атомные переменные, медленные во времени и пространстве, записываются следующим образом

$$a_{\pm\Omega}(z, \vec{q}, t) = a(z, \vec{q}, t)e^{\pm i\Omega t}, \quad (4.11)$$

$$b_{\pm k}(z, \vec{q}, t) = b(z, \vec{q}, t)e^{i(\Omega t \mp 2k_0 z)}.$$

Квантовая память реализуется как динамическое взаимодействие между амплитудами $a_{\Omega}(z, \vec{q}, t)$ и $b_k(z, \vec{q}, t)$. Мы подставляем эти переменные в уравнения (4.9), (4.10) и производим усреднение на временном масштабе $1/\Omega \ll t_{av} \ll T$ и на продольном пространственном масштабе $\lambda \ll z_{av} \ll L$. Предполагается, что длительность импульса света и длина атомной ячейки достаточно велики, $\Omega T \gg 1$ и $k_0 L \gg 1$, последнее условие актуально также и для классической голограммы.

Запишем уравнения движения,

$$\frac{\partial}{\partial z} a_{\Omega}(z, \vec{q}, t) = \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + i \left(\frac{\Omega}{c} - \frac{\vec{q}^2}{2k_0} \right) \right] a_{\Omega}(z, \vec{q}, t) - i \frac{\kappa}{2\sqrt{LT}} b_k(z, \vec{q}, t), \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} b_k(z, \vec{q}, t) = -i \frac{\kappa}{2\sqrt{LT}} a_{\Omega}(z, \vec{q}, t). \quad (4.13)$$

В дальнейшем, мы будем пренебрегать эффектами запаздывания. Дело в том, что длина импульса в пространстве, оцениваемая как $c/\delta\Omega$, где $\delta\Omega$ есть ширина спектра сигнала, и пространственная длина c/Ω модуляций на частоте Ω предполагаются много большими длины атомного образца, отсюда $\delta\Omega/c \ll \Omega/c \ll 1/L$. Это предположение позволяет нам пренебречь членами

$\sim 1/c$ в правой части (4.12) по сравнению с членами $\sim b/\sqrt{LT}$, которые можно оценить как $\sim a/L$. Здесь мы используем (4.13) и для типичных значений $\kappa \sim 1$ и $t \sim T$ получаем оценку $b \sim \sqrt{T/L} a$.

Перейдем теперь к новым амплитудам

$$\begin{aligned}\tilde{a}_\Omega(z, \vec{q}, t) &= a_\Omega(z, \vec{q}, t) \exp\left(i \frac{q^2}{2k_0} z\right), \\ \tilde{b}_k(z, \vec{q}, t) &= b_k(z, \vec{q}, t) \exp\left(i \frac{q^2}{2k_0} z\right),\end{aligned}\quad (4.14)$$

получаем следующие уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \tilde{a}_\Omega(z, \vec{q}, t) &= -i \frac{\kappa}{2\sqrt{LT}} \tilde{b}_k(z, \vec{q}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{b}_k(z, \vec{q}, t) &= -i \frac{\kappa}{2\sqrt{LT}} \tilde{a}_\Omega(z, \vec{q}, t).\end{aligned}\quad (4.15)$$

По сравнению с уравнениями, прежде возникавшими (например [49, 66]) для пространственно одномодовой квантовой памяти Рамановского типа на Λ -схемах, мы не сталкиваемся в уравнениях (4.15) с неблагоприятным эффектом штарковского сдвига атомных уровней классическим управляющим полем. Сдвиг уровней усложняет согласование фаз и эволюцию в целом, особенно в случае контрольного поля с зависящим от времени профилем. Это упрощение является следствием более симметричной природы квантового неразрушающего взаимодействия.

Из полученных уравнений движения (4.15) видно, что в нашей параллельной квантовой памяти, основанной на объемной голограмме, сигнальное поле и волна спиновой когерентности с некоторым поперечным волновым вектором \vec{q} (в параксиальном приближении) взаимодействуют в точности как волны распространяющиеся вдоль направления z в пространственно одномодовой памяти рамановского типа. Дифракция не оказывает влияния на обмен состояниями между светом и средой, наша память способна хранить столько ортогональных пространственных мод с разными \vec{q} , сколько существует орто-

гональных параксиальных мод в объеме атомного образца площадью сечения S и длиной L .

Решение полученных уравнений для амплитуд (4.14) является обобщением на пространственно многомодовый случай результатов полученных ранее для модели рамановского типа [49, 66],

$$\tilde{a}_\Omega(z, \vec{q}, t) = \tilde{a}_\Omega(0, \vec{q}, t) - \frac{\kappa}{2\sqrt{LT}} \int_0^t dt' \sqrt{\frac{z}{t-t'}} J_1 \left(\kappa \sqrt{\frac{z(t-t')}{LT}} \right) \tilde{a}_\Omega(0, \vec{q}, t') \quad (4.16)$$

$$-i \frac{\kappa}{2\sqrt{LT}} \int_0^z dz' J_0 \left(\kappa \sqrt{\frac{(z-z')t}{LT}} \right) \tilde{b}_k(z', \vec{q}, 0),$$

$$\tilde{b}_k(z, \vec{q}, t) = \tilde{b}_k(z, \vec{q}, 0) - \frac{\kappa}{2\sqrt{LT}} \int_0^z dz' \sqrt{\frac{t}{z-z'}} J_1 \left(\kappa \sqrt{\frac{(z-z')t}{LT}} \right) \tilde{b}_k(z', \vec{q}, 0) \quad (4.17)$$

$$-i \frac{\kappa}{2\sqrt{LT}} \int_0^t dt' J_0 \left(\kappa \sqrt{\frac{z(t-t')}{LT}} \right) \tilde{a}_\Omega(0, \vec{q}, t').$$

Перейдем к безразмерным координатам и амплитудам,

$$\frac{z}{L} = \xi, \quad \frac{t}{T} = \tau, \quad a_\Omega(z, \vec{q}, t) \sqrt{T} = \alpha_\Omega(\xi, \vec{q}, \tau), \quad b_k(z, \vec{q}, t) \sqrt{L} = \beta_k(\xi, \vec{q}, \tau). \quad (4.18)$$

Здесь $\alpha(z, \vec{\rho}, t)^\dagger \alpha(z, \vec{\rho}, t)$ дает число сигнальных фотонов на см^2 поперечного сечения луча за время взаимодействия T , а $\beta(z, \vec{\rho}, t)^\dagger \beta(z, \vec{\rho}, t)$ соответствует числу перевернутых спинов на см^2 поперечного сечения голограммы длиной L . Вышеприведенные уравнения изменяются следующим образом

$$\tilde{\alpha}_\Omega^{(out)}(\vec{q}, \tau) = \int_0^1 d\tau' G_1(\tau - \tau', 1) \tilde{\alpha}_\Omega^{(in)}(\vec{q}, \tau') - i \int_0^1 d\xi' G_0(1 - \xi', \tau) \tilde{\beta}_k^{(in)}(\xi', \vec{q}), \quad (4.19)$$

$$\tilde{\beta}_k^{(out)}(\xi, \vec{q}) = \int_0^1 d\xi' G_1(\xi - \xi', 1) \tilde{\beta}_k^{(in)}(\xi', \vec{q}) - i \int_0^1 d\tau' G_0(1 - \tau', \xi) \tilde{\alpha}_\Omega^{(in)}(\vec{q}, \tau'), \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{\Omega}^{(in)}(\vec{q}, \tau) &= \tilde{\alpha}_{\Omega}(0, \vec{q}, \tau), \\
\tilde{\alpha}_{\Omega}^{(out)}(\vec{q}, \tau) &= \tilde{\alpha}_{\Omega}(1, \vec{q}, \tau), \\
\tilde{\beta}^{(in)}(\xi, \vec{q}) &= \tilde{\beta}_k(\xi, \vec{q}, 0), \\
\tilde{\beta}^{(out)}(\xi, \vec{q}) &= \tilde{\beta}_k(\xi, \vec{q}, 1).
\end{aligned}$$

Интегральные ядра определяются как

$$G_0(p, q) = \frac{\kappa}{2} J_0(\kappa\sqrt{pq}), \quad G_1(p, q) = \delta(p) - \frac{\kappa}{2} J_1(\kappa\sqrt{qp})\sqrt{q/p}\theta(p), \quad (4.21)$$

здесь J_n обозначает функцию Бесселя порядка n .

Подобно анализу, проведенному в работе [49], мы используем тот факт, что ядра $G_{0,1}$ имеют общие собственные функции,

$$\begin{aligned}
G_0(1-x, y) &= \sum_i \phi_i(y) \lambda_i \phi_i(1-x), \\
G_1(y-x, 1) &= \sum_i \phi_i(y) \mu_i \phi_i(1-x),
\end{aligned} \quad (4.22)$$

и их собственные значения удовлетворяют условию $\lambda_i^2 + \mu_i^2 = 1$ для всех i .

Применяя разложение переменных следующего вида

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{\Omega}^{(in)}(\vec{q}, \tau) &= \sum_j \tilde{\alpha}_{\Omega,j}^{(in)}(\vec{q}) \phi_j(1-\tau), \\
\tilde{\beta}_k^{(in)}(\xi, \vec{q}) &= \sum_j \tilde{\beta}_{k,j}^{(in)}(\vec{q}) \phi_j(1-\xi),
\end{aligned} \quad (4.23)$$

можно получить преобразования связывающие входные и выходные состояния системы после одного цикла взаимодействия света с веществом:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{\Omega}^{(out)}(\vec{q}, \tau) &= \sum_i \left[\mu_i \tilde{\alpha}_{\Omega,i}^{(in)}(\vec{q}) - i \lambda_i \tilde{\beta}_{k,i}^{(in)}(q) \right] \phi_i(\tau), \\
\tilde{\beta}_k^{(out)}(\xi, \vec{q}) &= \sum_i \left[-i \lambda_i \tilde{\alpha}_{\Omega,i}^{(in)}(\vec{q}) + \mu_i \tilde{\beta}_{k,i}^{(in)}(q) \right] \phi_i(\xi).
\end{aligned} \quad (4.24)$$

Это преобразование типа делительной пластинки является унитарным и, следовательно, сохраняет коммутационные соотношения. Уравнение (4.24) показывает, что если записываемое сигнальное поле имеет временной профиль в виде i -ой собственной моды G_0 с собственным значением λ_i близким к единице, то оно запишется в i -ую моду атомов, начальное состояние которой будет стерто, поскольку соответствующее собственное число μ_i оказывается близким к нулю.

Для того, чтобы считать записанное в голограмме изображение, необходимо повторить процедуру обмена квантовыми состояниями между светом и атомами, то есть пропустить еще один импульс классического опорного света через атомную среду. В результате рассеяния опорного поля на фазовой объемной дифракционной решетке, возникшей после записи света, образуется y -поляризованное поле, несущее состояние, которое было записано на атомы. Для описания полного цикла записи-считывания параллельной квантовой памяти, мы соберем преобразования

$$\left\{ \tilde{\alpha}_{\Omega}^{W(in)}(\vec{q}, \tau), \tilde{\beta}_k^{W(in)}(\xi, \vec{q}) \right\} \rightarrow \tilde{\beta}_k^{W(out)}(\xi, \vec{q})$$

для стадии записи, и

$$\left\{ \tilde{\alpha}_{\Omega}^{R(in)}(\vec{q}, \tau), \tilde{\beta}_k^{R(in)}(\xi, \vec{q}) = \tilde{\beta}_k^{W(out)}(\xi, \vec{q}) \right\} \rightarrow \tilde{\alpha}_{\Omega}^{R(out)}(\vec{q}, \tau)$$

для стадии считывания и восстановим дифракционный множитель (см. (4.14)).

Получаем,

$$\alpha_{\Omega}^{R(out)}(\vec{q}, \tau) = \exp\left(-i\frac{q^2}{2k_0}L\right) \times \quad (4.25)$$

$$\sum_i \left\{ \mu_i \alpha_{\Omega,i}^{R(in)}(\vec{q}) - i\lambda_i \sum_j f_{ij} \left[\mu_j \tilde{\beta}_{k,j}^{W(in)}(\vec{q}) - i\lambda_j \alpha_{\Omega,j}^{W(in)}(\vec{q}) \right] \right\} \phi_i(\tau),$$

где

$$f_{ij} = \int_0^1 d\xi \phi_i(1-\xi) \phi_j(\xi), \quad (4.26)$$

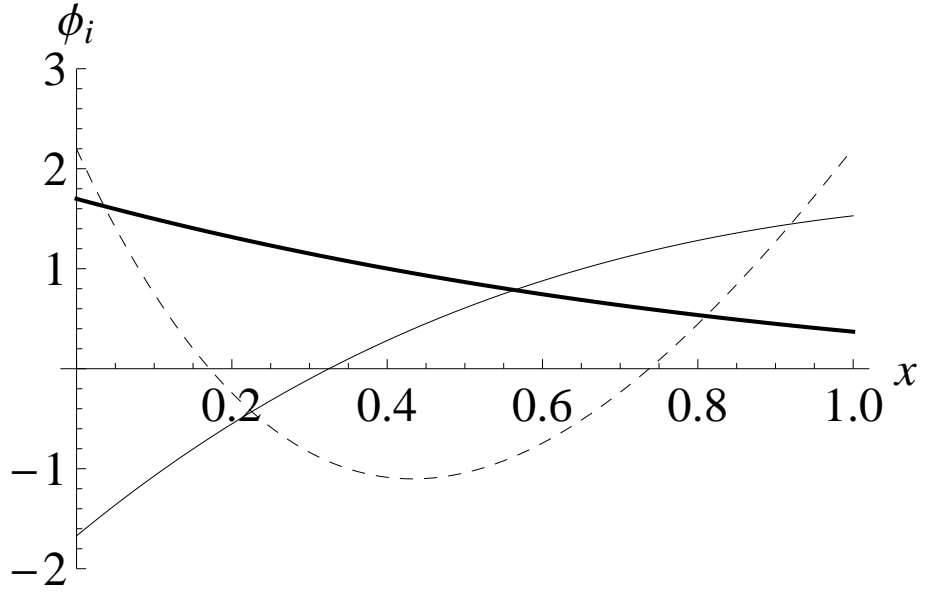


Рис. 4.2. Первые три собственных функции: ϕ_1 , ϕ_2 , и ϕ_3 (толстая, тонкая и пунктирная линии соответственно) для $\kappa = 4$. Соответствующие собственные значения $\lambda_1 \approx 0.988$, $\lambda_2 \approx -0.518$, и $\lambda_3 \approx 0.043$.

есть перекрытие собственных функций. На Рис. 4.2 мы приводим несколько первых собственных функций полученных численно. Из уравнения (4.25) можно видеть, что входная (на стадии записи) квантованная амплитуда сигнального поля i -ой собственной моды восстанавливается при считывании на длине $z = L$ с множителем $\sim \exp(-iq^2L/2k_0) \lambda_i^2 f_{ii}$. Таким образом эффективность (отношение числа фотонов в считанном импульсе к числу фотонов во входном импульсе) хранения любой поперечной моды сигнального поля определяется оптической плотностью атомного ансамбля, подобно одномодовому случаю. Как и в случае схемы рамановского типа, наша модель демонстрирует симметрию обращения во времени между входными и выходными модами, что следует из входного (4.24) и выходного (4.25) разложения сигнала.

На Рис. 4.3 показана эффективность считывания из квантовой памяти как функция константы взаимодействия κ . Этот результат получен численно,

путем нахождения собственных значений и перекрытия собственных функций. Эффективность памяти для входного поля, имеющего временной профиль в виде собственной функции с наибольшим собственным значением λ_1 , дается выражением вида

$$\eta = \lambda_1^2 \left(\sum_i \lambda_i f_{i1} \right)^2 .$$

Здесь предполагается, что считывание сонаправленно записи и константа взаимодействия на этапе записи и считывания одна и та же. Толстая линия на графике показывает эффективность памяти при сонаправленных записи и считывании. В работе [49] показано, что при прямом считывании разумно ограничить константу взаимодействия при записи и использовать максимально доступную при считывании. Так эффективность памяти ≥ 0.95 может быть достигнута при использовании константы взаимодействия при записи $\kappa \approx 4$ и для считывания свыше 20. Из-за симметрии обращения во времени между входными и выходными модами оказывается выгоднее считывать память навстречу записи, что приводит к идеальному перекрытию собственных функций, так что $\eta = \lambda_1^4$, это видно на приведенном графике. Однако для данной схемы объемной голограммы, такой способ считывания оказывается неприемлем и требуются дополнительные исследования, для соответствующей модификации объемной голограммы.

Емкость памяти, которая напрямую зависит от числа поперечных мод, которые память может хранить, является одним из важнейших параметров для практического применения памяти. Емкость, обсуждавшейся в главе 2, тонкой голограммы существенно ограничена дифракцией. А именно: дифракционное размытие элемента входного изображения с линейным размером d должно быть небольшим по сравнению с размером самого пикселя $\lambda/d \cdot L \leq d$. Следовательно, число N разрешимых мод изображения в тонкой голограмме определяется числом Френеля атомного образца F_N , так что $N \sim S/d^2 \sim$

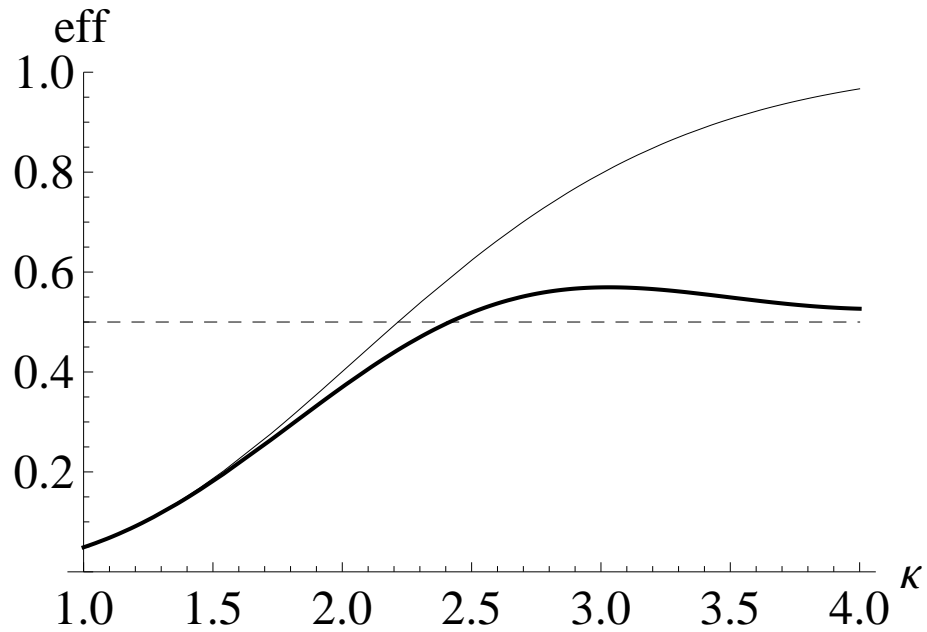


Рис. 4.3. Эффективность памяти в зависимости от константы взаимодействия для прямого считывания – толстая линия, считывания во встречном направлении – тонкая линия, пунктиром обозначена граница, выше которой начинается квантовая память.

$S/\lambda L = F_N$, где S обозначает площадь поперечного сечения образца, а L – длина образца. В другой работе по многомодовой оптической квантовой памяти на атомных ансамблях, с фазово-согласованным считыванием назад [4], авторы также оценивают число сохраняемых мод равным числу Френеля F_N . Таким образом, схема памяти [4] эквивалентна тонкой голограмме, в смысле количества мод.

Для сравнения, в представленной толстой голограмме, влияние дифракции на записанный волновой фронт сигнала оказывается таким же, как при распространении в пустом пространстве, и может быть компенсировано использованием простой системы линз с входной фокальной плоскостью в $z = 0$. В этом случае, ограничение на емкость объемной голограммы происходит, во-первых, из параксиального приближения, которое использовалось при расчете системы, $\lambda/d \leq \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$ есть малый параметр параксиального приближения. Второе ограничение накладывается геометрией атомного образца,

необходимо чтобы квантованные волновые пакеты распространялись внутри образца, то есть $\lambda/d \cdot L \approx \sqrt{S}$. Таким образом, число записываемых мод в объемной голограмме можно оценить как $S/d^2 \sim \min\{\varepsilon^2 S/\lambda^2, F_N^2\}$. Для не слишком удлиненного образца с $\sqrt{S}/L \geq \varepsilon$ число мод равно $\varepsilon^2 S/\lambda^2$ что больше чем у любой памяти, предложенной на данный момент. Поскольку полученные нами уравнения, описывающие обмен состояниями между светом и атомами, эквивалентны таковым для памяти рамановского типа, то можно с уверенностью предположить, что число мод, для многомодовой квантовой памяти на основе Λ -схемы с сонаправленными записью и чтением, будет также порядка $\varepsilon^2 S/\lambda^2$.

4.2. Оценки практической реализуемости

Для оценки осуществимости на практике предложенного протокола объемной квантовой голограммы, возьмем, например, экспериментально доступный ансамбль холодных атомов Cs при температуре $50 \mu\text{K}$, длиной 1 мм, диаметром 80 мкм и резонансной оптической плотностью $\alpha_0 = \lambda^2 n_a L/2\pi$ порядка 16 [67]. Одно из ограничений накладывается движением атомов в течении времени хранения информации: атомы не должны переносить когерентность на расстояние больше или порядка длины волны $\lambda/2$ спиновой когерентности. В приведенном примере атомного ансамбля атомы со средней тепловой скоростью $5,5 \text{ см/с}$ пролетают расстояние $\lambda/2 \sim 0,42 \text{ мкм}$ за 8 мкс, что дает нам достижимое время хранения порядка нескольких микросекунд.

Как уже упоминалось выше, константа взаимодействия может быть записана как $\kappa^2 = \alpha_0 \eta$, где η есть вероятность спонтанного излучения с возбужденного уровня [1]. Для отстройки от оптического перехода $\sim 100 \text{ МГц}$, $\eta \sim 0,2$ можно получить константу взаимодействия $\kappa \sim 2$ (как в [67]), что дает эффективность квантовой памяти $\sim 40\%$ для каждой записанной мо-

ды. Эффективность получается порядка наилучших результатов для одномодовой памяти, продемонстрированных на данный момент [1], таким образом данная многомодовая память оказывается полезна для условных (conditional) протоколов квантовых повторителей [3]. Достижения ненулевой квантовой емкости для безусловной (unconditional) квантовой памяти требует преодоления предела эффективности 50% [58]. Этого можно достичь при оптической плотности вдвое выше продемонстрированной в [67].

Число Френеля рассматриваемого ансамбля $F_N \sim 5 \dots 6$. Верхняя граница на число хранимых параллельных мод оценивается как F_N^2 или, в случае короткого и широкого ансамбля, через $\epsilon^2 S / \lambda^2$ для $\epsilon \sim 0,1$ (где ϵ есть малый параметр параксиального приближения), это дает число мод порядка нескольких десятков, что значительно лучше, чем $\sim 5 \dots 6$ мод для сравнимой тонкой голограммы.

В случае Бозе-Эйнштейновского конденсата или твердотельной среды [3], уже используемой для квантовой одномодовой памяти, атомным движением можно полностью пренебречь и, следовательно, единственным дополнительным требованием к многомодовой памяти является большое число Френеля атомного образца.

Мы представили расширение классической объемной голограммы в квантовую область. В представленной схеме, различные пространственные моды входного поля записываются в соответствующие ортогональные пространственные моды атомного ансамбля. Объемная квантовая голограмма может хранить перепутанные и прочие квантовые изображения и обладает емкостью много большей чем схемы предложенные до сих пор. Объемная голограмма, предложенная здесь, не требует дополнительных операций, таких как сжатие, чтобы достичь идеального, в принципе, результата записи и считывания. Следует подчеркнуть, что условия на оптическую плотность, вероятность спонтанного излучения и неоднородное уширение для квантовой голограммы в

точности те же самые что и для одномодовой памяти, возникают только два дополнительных условия: ограничение на атомное движение и число Френе-ля атомного образца. Несмотря на то, что рассматривались атомы со спином $1/2$, приведенный анализ может быть легко обобщен на случай щелочных атомов с произвольным угловым моментом, при условии, что отстройка от резонанса много больше сверхтонкого расщепления возбужденного состояния [1]. Содержание этой главы опубликовано в [18] и [19].

Заключение

В работе впервые предложены протоколы квантовых голограмм на основе пространственно протяженных атомных ансамблей. Построены динамические уравнения в представлении Гейзенберга, описывающие эволюцию коллективного спина протяженного атомного ансамбля и, взаимодействующего с ним, квантового электромагнитного поля в параксиальном приближении. Детально исследованы шумы возникающие при записи тонкой голограммы методом двойного прохода и с использованием обратной связи. Проанализировано зашумление сигнала вследствие рассеяния сигнального поля, антисжатой квадратуры считывающего поля и вакуумных флуктуаций на пространственных флуктуациях атомной плотности, этот эффект принципиально не может быть учтен в одномодовом подходе, рассматривавшемся прежде. Сделан вывод о необходимости фильтрации сигнала в Фурье-области (сглаживание сигнала), чтобы исключить дополнительные (ортогональные пиксельной) моды сигнала, увеличивающие шум записи, за счет рассеяния на флуктуациях плотности. Найдена верность записи-считывания когерентных квантовых состояний для тонкой голограммы в зависимости от размера пикселя изображения при использовании широкополосного сжатого света для считывания тонкой голограммы. Продемонстрирована нечувствительность (в смысле пространственного разрешения) квантовой объемной голограммы к дифракции, найдены собственные функции этой памяти и эффективность считывания в прямом и обратном направлении. Оценено число пространственных мод, которые может хранить тонкая и объемная квантовая голограмма в атомном ансамбле с заданными параметрами. Дана оценка эффективности и времени жизни памяти на основе протокола объемной квантовой голограммы, для экспериментально доступных холодных атомных ансамблей.

Литература

- [1] *K. Hammerer, A. S. Sorensen, E. S. Polzik.* Quantum interface between light and atomic ensembles // *arXiv:0807.3358v3 [quant-ph]*. — 2008.
- [2] *Pieter Kok, W. J. Munro, Kae Nemoto et al.* Linear optical quantum computing with photonic qubits // *Rev. Mod. Phys.* — 2007. — Vol. 79. — P. 135.
- [3] *Christoph Simon, Hugues de Riedmatten, Mikael Afzelius et al.* Quantum Repeaters with Photon Pair Sources and Multimode Memories // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98. — P. 190503.
- [4] *K. Surmacz, J. Nunn, K. Reim et al.* Efficient spatially resolved multimode quantum memory // *Phys. Rev. A.* — 2008. — Vol. 78. — P. 033806.
- [5] *G. Hétet, J. J. Longdell, M. J. Sellars et al.* Multimodal Properties and Dynamics of Gradient Echo Quantum Memory // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101. — P. 203601.
- [6] *Ryan M. Camacho, Curtis J. Broadbent, Irfan Ali-Khan, John C. Howell.* All-Optical Delay of Images using Slow Light // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98. — P. 043902.
- [7] *M. Shuker, O. Firstenberg, R. Pugatch et al.* Storing Images in Warm Atomic Vapor // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100. — P. 223601.
- [8] *Praveen K. Vudyasetu, Ryan M. Camacho, John C. Howell.* Storage and Retrieval of Multimode Transverse Images in Hot Atomic Rubidium Vapor // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100. — P. 123903.
- [9] Quantum Imaging, Ed. by M. Kolobov. — Springer, 2006.

- [10] *A. Gatti, I. V. Sokolov, M. I. Kolobov, L. A. Lugiato.* Quantum fluctuations in holographic teleportation of optical images // *Eur. Phys. J. D.* — 2004. — Vol. 30. — Pp. 123–135.
- [11] *Liubov V. Magdenko, Mikhail I. Kolobov, Ivan V. Sokolov.* Quantum teleportation of optical images: Multiuser parallel quantum channel // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 75. — P. 042324.
- [12] *Yu. M. Golubev, T. Yu. Golubeva, M. I. Kolobov, I. V. Sokolov.* Quantum parallel dense coding of optical images // *J. Mod. Opt.: Special issue on Quantum Imaging.* — 2006. — Vol. 53. — P. 699.
- [13] *J. B. Pors, S. S. R. Oemrawsingh, A. Aiello et al.* Shannon Dimensionality of Quantum Channels and Its Application to Photon Entanglement // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101. — P. 120502.
- [14] *Mikhail I. Kolobov.* The spatial behavior of nonclassical light // *Rev. Mod. Phys.* — 1999. — Oct. — Vol. 71, no. 5. — Pp. 1539–1589.
- [15] *Vincent Boyer, Alberto M. Marino, Raphael C. Pooser, Paul D. Lett.* Entangled Images from Four-Wave Mixing // *Science.* — 2008. — Vol. 321. — Pp. 544 – 547.
- [16] *Denis V. Vasilyev, Ivan V. Sokolov, Eugene S. Polzik.* Quantum memory for images – a quantum hologram // *Phys. Rev. A.* — 2008. — Vol. 77. — P. 020302(R).
- [17] *Денис В. Васильев, Иван В. Соколов, Eugene S. Polzik.* Квантовая память для изображений с использованием обратной связи // *Оптика и спектроскопия.* — 2009. — Т. 106, № 6. — С. 962–968.

- [18] *Denis V. Vasilyev, Ivan V. Sokolov, Eugene S. Polzik.* A volume quantum hologram // Third Russian-French Laser Physics Workshop for Young Scientists, Technical Digest. — 2008. — P. 14.
- [19] *Denis V. Vasilyev, Ivan V. Sokolov, Eugene S. Polzik.* A quantum volume hologram // *arXiv:0906.1528v1 [quant-ph]*. — 2009. — jun.
- [20] *А. А. Курикуша.* Квантовая оптика и оптическая локация. — М.: Советское радио, 1973.
- [21] *J. P. Gordon.* Quantum effects in communication system // *Proc. IRE.* — 1962. — Vol. 50. — Pp. 1898–1908.
- [22] *Д. С. Лебедев, Л. Б. Левитин.* Максимальное количество информации, переносимое электромагнитным полем // *Доклады АН СССР.* — 1963. — Т. 169. — С. 1299–1302.
- [23] *Д. С. Лебедев, Л. Б. Левитин.* Перенос информации электромагнитным полем, Сб. “Теория передачи информации”. — М.: Наука, 1964. — С. 5–20.
- [24] *Р. Л. Стратонович.* Количество информации, передаваемое квантовым каналом связи I, II // *Изв. высш. учебн. завед. Радиофизика.* — 1965. — Т. 8. — С. 116–141.
- [25] *Р. Л. Стратонович.* Скорость передачи информации в некоторых квантовых каналах связи // *Пробл. передачи информации.* — 1966. — Т. 2. — С. 45–57.
- [26] *А. С. Холєво.* Информационные аспекты квантового измерения // *Пробл. передачи информации.* — 1973. — Т. 9. — С. 31–42.
- [27] *C. E. Shannon.* A mathematical theory of communication // *Bell System Technical Journal.* — 1948. — Vol. 27. — Pp. 379–423 and 623–656.

- [28] *S. Lloyd, V. Giovannetti, L. Maccone et al.* Proof of the bosonic minimum output entropy conjecture // *arXiv:0906.2758v1 [quant-ph]*. — 2009.
- [29] *S. Lloyd, V. Giovannetti, L. Maccone et al.* Minimum output entropy of Gaussian channels // *arXiv:0906.2762v1 [quant-ph]*. — 2009.
- [30] *R. P. Feynman.* Simulating physics with computers // *Int. J. Theor. Phys.* — 1982. — Vol. 21, no. 6/7. — Pp. 467–488.
- [31] *P. W. Shor.* Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring // *Proc. of the 35th Ann. Symp. of the Foundation of Computer Science.* — 1994. — Pp. 124–134.
- [32] *Lov K. Grover.* Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Jul. — Vol. 79, no. 2. — Pp. 325–328.
- [33] *Lieven M. K. Vandersypen, Matthias Steffen, Gregory Breyta et al.* Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance // *Nature.* — 2001. — Vol. 414. — Pp. 883–887.
- [34] *J. P. Home, D. Hanneke, J. D. Jost et al.* Complete Methods Set for Scalable Ion Trap Quantum Information Processing // *Science.* — 2009. — Aug 6.
- [35] *J. F. Clauser, A. Shimony.* Bell’s theorem: Experimental tests and implications // *Rep. Prog. Phys.* — 1978. — Vol. 41. — Pp. 1881–1927.
- [36] *W. K. Wootters, W. H. Zurek.* A single quantum cannot be cloned // *Nature.* — 1982. — Vol. 299. — Pp. 802–803.
- [37] *D. Dicks.* Communication by EPR devices // *Phys. Lett. A.* — 1982. — Vol. 92. — Pp. 271–272.

- [38] *Ch. H. Bennett, G. Brassard.* Quantum key distribution and coin tossing // *Proc. of IEEE Int. Conf. on Computers, Systems, and Signal Processing.* — 1984. — Pp. 175–179.
- [39] *Ch. H. Bennett, G. Brassard.* The dawn of a new era for quantum cryptography: The experimental prototype is working! // *Special interest group on automata and computability theory news.* — 1989. — Vol. 20. — Pp. 78–82.
- [40] *Artur K. Ekert.* Quantum cryptography based on Bell’s theorem // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — Aug. — Vol. 67, no. 6. — Pp. 661–663.
- [41] *Charles H. Bennett.* Quantum cryptography using any two nonorthogonal states // *Phys. Rev. Lett.* — 1992. — May. — Vol. 68, no. 21. — Pp. 3121–3124.
- [42] *Frédéric Grosshans, Philippe Grangier.* Continuous Variable Quantum Cryptography Using Coherent States // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Jan. — Vol. 88, no. 5. — P. 057902.
- [43] <http://www.maqitech.com>; <http://www.idquantique.com>.
- [44] *Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau et al.* Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Mar. — Vol. 70, no. 13. — Pp. 1895–1899.
- [45] *Lev Vaidman.* Teleportation of quantum states // *Phys. Rev. A.* — 1994. — Feb. — Vol. 49, no. 2. — Pp. 1473–1476.
- [46] *Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Klaus Mattle et al.* Experimental quantum teleportation // *Nature.* — 1997. — Vol. 390. — Pp. 575–579.
- [47] *J. Sherson, H. Krauter, R. Olsson et al.* Quantum teleportation between light and matter // *Nature.* — 2006. — Vol. 443. — Pp. 557–560.

- [48] *S. Olmschenk, D. N. Matsukevich, P. Maunz et al.* Quantum Teleportation Between Distant Matter Qubits // *Science*. — 2009. — Jan. — Vol. 323, no. 5913. — Pp. 486–489.
- [49] *J. Nunn, I. A. Walmsley, M. G. Raymer et al.* Mapping broadband single-photon wave packets into an atomic memory // *Phys. Rev. A*. — 2007. — Vol. 75. — P. 011401(R).
- [50] *B. Julsgaard, J. Sherson, J. Fiurasek et al.* Experimental demonstration of quantum memory for light // *Nature*. — 2004. — Vol. 432. — Pp. 482–486.
- [51] *W. Happer, B. S. Mathur.* Effective Operator Formalism in Optical Pumping // *Phys. Rev.* — 1967. — Nov. — Vol. 163, no. 1. — Pp. 12–25.
- [52] *K. Hammerer, M. M. Wolf, E. S. Polzik, J. I. Cirac.* Quantum Benchmark for Storage and Transmission of Coherent States // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Apr. — Vol. 94, no. 15. — P. 150503.
- [53] *M. Owari, M. B. Plenio, E. S. Polzik et al.* Squeezing the limit: quantum benchmarks for the teleportation and storage of squeezed states // *New J. Phys.* — 2008. — Vol. 10. — P. 113014.
- [54] *Frédéric Grosshans, Philippe Grangier.* Quantum cloning and teleportation criteria for continuous quantum variables // *Phys. Rev. A*. — 2001. — Jun. — Vol. 64, no. 1. — P. 010301.
- [55] *N. J. Cerf, O. Krüger, P. Navez et al.* Non-Gaussian Cloning of Quantum Coherent States is Optimal // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Aug. — Vol. 95, no. 7. — P. 070501.
- [56] *Benjamin Schumacher, M. A. Nielsen.* Quantum data processing and error correction // *Phys. Rev. A*. — 1996. — Oct. — Vol. 54, no. 4. — Pp. 2629–2635.

- [57] *Seth Lloyd*. Capacity of the noisy quantum channel // *Phys. Rev. A*. — 1997. — Mar. — Vol. 55, no. 3. — Pp. 1613–1622.
- [58] *Michael M. Wolf, David Pérez-García, Geza Giedke*. Quantum Capacities of Bosonic Channel // *Phys. Rev. Lett.* — 98. — Vol. 2007. — P. 130501.
- [59] *М. И. Колобов, И. В. Соколов*. Поведение сжатых состояний света в пространстве и квантовые шумы оптических изображений // *ЖЭТФ*. — 1989. — Т. 96, № 6. — С. 1945.
- [60] *I. V. Sokolov, M. I. Kolobov, A. Gatti, L. A. Lugiato*. Quantum holographic teleportation // *Opt. Comm.* — 2001. — Vol. 193. — Pp. 175–180.
- [61] *A. Kuzmich, E. S. Polzik*. Quantum Information with Continuous Variables, Ed. by S. L. Braunstein, A. K. Pati. — Kluwer, 2003.
- [62] *J. Sherson, B. Julsgaard, E. S. Polzik*. Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics, Volume 54, Ed. by P. R. Berman, C. C. Lin, E. Arimondo. — Academic Press, 2006. — November.
- [63] *И. В. Соколов, А. Гатти, М. И. Колобов, Л. А. Луджуато*. Квантовая телепортация и голография // *УФН*. — 2001. — Т. 171. — С. 1264.
- [64] *Ю. Н. Денисюк* // *Доклады АН СССР*. — 1962. — Т. 144(6). — С. 1275–1278.
- [65] *Christine A. Muschik, Klemens Hammerer, Eugene S. Polzik, J. Ignacio Cirac*. Efficient quantum memory and entanglement between light and an atomic ensemble using magnetic fields // *Phys. Rev. A*. — 2006. — Vol. 73. — P. 062329.
- [66] *O. S. Mishina, D. V. Kupriyanov, J. H. Muller, E. S. Polzik*. Spectral theory

of quantum memory and entanglement via Raman scattering of light by an atomic ensemble // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 75. — P. 042326.

- [67] *J. Appel, P. J. Windpassinger, D. Oblak et al.* Mesoscopic atomic entanglement for precision measurements beyond the standard quantum limit // *Proceedings of the National Academy of Science.* — 2009. — Vol. 106, no. 27. — Pp. 10960–10965.

Приложение А

Об эффективном гамильтониане для спиновой подсистемы и нерезонансной лазерной волны

Выразим положительно частотную амплитуду световой волны через медленно меняющиеся операторы рождения и уничтожения фотонов $A_\lambda^\dagger(z, \vec{\rho}, t)$ и $A_\lambda(z, \vec{\rho}, t)$,

$$\mathbf{E}^{(+)}(z, \vec{\rho}, t) = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{c}} \exp[i(k_0z - \omega_0t)] \sum_\lambda \mathbf{e}_\lambda A_\lambda(z, \vec{\rho}, t), \quad (\text{A.1})$$

где ω_0 несущая частота волны распространяющейся в $+z$ направлении и $k_0 = \omega_0/c$ ее волновое число, а $\vec{\rho}$ координата в плоскости ортогональной направлению z . Суммирование проводится по двум ортогональным поляризациям волны, бегущей вдоль оси z . В параксиальном приближении мы не учитываем (пока) появление продольной компоненты поляризации для наклонных волн.

Амплитуды A_λ нормированы так, что величина $A_\lambda^\dagger(z, \vec{\rho}, t)A_\lambda(z, \vec{\rho}, t)$ есть плотность потока фотонов на $\text{см}^2 \cdot \text{с}$. В классике плотность энергии на единицу объема, отвечающая (A.1), есть¹

$$\frac{1}{8\pi} [\mathbf{E}^2(t) + \mathbf{H}^2(t)]^t = \frac{\hbar\omega_0}{c} \sum_\lambda |A_\lambda|^2,$$

что и позволяет понимать величину $A_\lambda^\dagger(z, \vec{\rho}, t)A_\lambda(z, \vec{\rho}, t)$ как число фотонов в цуге поля единичного сечения и длиной c .

Матричный элемент эффективного гамильтониана порождается в теории возмущений амплитудой развития, представленной на Рис. А.1. Здесь подуровни полного момента нижнего и верхнего состояний обозначены соответственно как (g, μ) и (e, m) . При достаточной отстройке лазерной частоты

¹ пользуемся здесь системой `cgse`

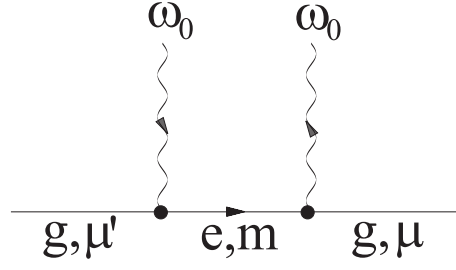


Рис. А.1. Диаграмма Переля.

ω_0 от частоты ω_{eg} электронного перехода эта амплитуда второго порядка по электродипольному взаимодействию приближенно равна амплитуде первого порядка по новому возмущению, которое и есть эффективный гамильтониан. Матричный элемент, отвечающий нарисованной амплитуде, есть

$$-\frac{i}{\hbar} \langle g, \mu | H_{eff}^a | g, \mu' \rangle = \quad (\text{A.2})$$

$$\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \frac{2\pi\hbar\omega_0}{c} \frac{1}{-i(\omega_{eg} - \omega_0)} \sum_m \langle \mu | \mathbf{e}_\lambda^* \cdot \mathbf{d} | m \rangle \langle m | \mathbf{e}_{\lambda'} \cdot \mathbf{d} | \mu' \rangle A_\lambda^\dagger(z, \vec{\rho}, t) A_{\lambda'}(z, \vec{\rho}, t).$$

Заметим, что точка обозначает ортогональное, а не скалярное произведение. Для вещественных физических переменных обе возможности равноправны и принятая договоренность не влияет на конечные физические выводы, но промежуточные формулы могут выглядеть по-разному, например, потому, что в них входят комплексные амплитуды.

Чтобы раскрыть матричные элементы дипольного момента \mathbf{d} , следует его разложить в базисе ортов сферических координат и применить теорему Вигнера – Эккарта. Примем определения ортов поляризации, используемые в [51]. В правой системе координат (x, y, z) орты сферических координат определяются как

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y), \\ \mathbf{i}_0 &= \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{i}_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

и обладают свойствами

$$(\mathbf{i}_\mu)^* \cdot \mathbf{i}_\nu = \delta_{\mu\nu}, \quad (\mathbf{i}_\mu)^* = (-1)^\mu \mathbf{i}_{-\mu}. \quad (\text{A.4})$$

Вектор \mathbf{d} должен быть представлен в этом базисе следующим образом:

$$\mathbf{d} = \sum_{\mu} \mathbf{i}_\mu^* d_\mu, \quad d_\mu = \mathbf{i}_\mu \cdot \mathbf{d}, \quad (\text{A.5})$$

причем для эрмитова оператора \mathbf{d} выполняется

$$d_\mu^\dagger = (-1)^\mu d_{-\mu}. \quad (\text{A.6})$$

Удобно выбрать орты поляризации поля в (A.2) так, чтобы они совпадали с ортами сферических координат. Это означает разложение поля по волнам левой и правой круговых поляризаций, именно,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_l &= \mathbf{i}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y), \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{i}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Волна с поляризацией \mathbf{e}_l поляризована по *левому* кругу, если принять определение поляризации по Бутикову (т.е. если смотреть навстречу волне, вектор электрической напряженности в плоскости $z = 0$ вращается налево - против часовой стрелки). Чтобы в этом убедиться, достаточно нарисовать в плоскости x, y наблюдаемое вещественное поле

$$Re(\mathbf{e}_l e^{-i\omega_0 t}) \sim -[\mathbf{e}_x \cos(\omega_0 t) + \mathbf{e}_y \sin(\omega_0 t)].$$

По теореме Вигнера – Экарта матричные элементы дипольного момента раскрываются как

$$\langle J_e, m | d_\nu^1 | J_g, \mu \rangle = (-1)^{J_e - m} \langle J_e || d^1 || J_g \rangle \begin{pmatrix} J_e & 1 & J_g \\ -m & \nu & \mu \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

где $\langle J_e || d^1 || J_g \rangle$ – приведенный матричный элемент. Матричные элементы (A.8) не равны нулю при $m = \nu + \mu$. Для атома с $J_g = J_e = 1/2$, $\mu = \pm 1/2$, $m = \pm 1/2$ находим, используя (A.4 - A.6):

$$\begin{aligned} \langle e, +\frac{1}{2} | \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{d} | g, -\frac{1}{2} \rangle &= \langle e, +\frac{1}{2} | d_{+1} | g, -\frac{1}{2} \rangle = d, \\ \langle g, -\frac{1}{2} | \mathbf{e}_l^* \cdot \mathbf{d} | e, +\frac{1}{2} \rangle &= \langle g, -\frac{1}{2} | d_{+1}^\dagger | e, +\frac{1}{2} \rangle = d^*. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Проделав аналогичные выкладки для вкладов с участием правой круговой поляризации, получаем эффективный гамильтониан неразрушающего взаимодействия атома и квазирезонансной световой волны в виде

$$H_{eff}^a = \frac{2\pi k_0 |d|^2}{\omega_{eg} - \omega_0} \left\{ |-\rangle \langle -| A_l^\dagger A_l + |+\rangle \langle +| A_r^\dagger A_r \right\}, \quad (\text{A.10})$$

где подуровни нижнего электронного состояния $|g, -1/2\rangle$, $|g, +1/2\rangle$ обозначены для краткости как $|-\rangle$, $|+\rangle$.

Представим проекторы, входящие в (A.10), как $|-\rangle \langle -| = 1/2 - J_z^a$, $|+\rangle \langle +| = 1/2 + J_z^a$, где J_z^a - проекция момента атома на направление z . Удобно связать матричный элемент дипольного момента d с физическим параметром – скоростью спонтанного распада верхнего уровня Γ . В принятой схеме из-за правил отбора мы фактически имеем распад в двухуровневой системе и можем пользоваться соответствующим результатом,

$$\Gamma = \frac{4k_0^3 d^2}{3\hbar}. \quad (\text{A.11})$$

Окончательный вид эффективного гамильтониана есть

$$H_{eff}^a = \frac{3\pi\hbar\Gamma}{2k_0^2(\omega_{eg} - \omega)} \left\{ \frac{1}{2} I(z_a, \vec{\rho}_a, t) + J_z^a S_z(z_a, \vec{\rho}_a, t) \right\}, \quad (\text{A.12})$$

где

$$\begin{aligned} I(z_a, \vec{\rho}_a, t) &= A_r^\dagger A_r + A_l^\dagger A_l, \\ S_z(z_a, \vec{\rho}_a, t) &= A_r^\dagger A_r - A_l^\dagger A_l, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

есть полная интенсивность волны и разность интенсивностей волн, поляризованных по правому и левому кругу (проекция вектора Стокса на ось z).

Если посмотреть на эффективный гамильтониан (A.12), то видно, что первый член, пропорциональный интенсивности, дает одинаковый вклад для правых и левых фотонов (в отличие от второго члена) и обуславливает просто наличие коэффициента преломления, который приводит к одинаковому набегу фазы для правых и левых фотонов и в интересующий нас эффект поворота поляризации света вклада не дает. Для эволюции атомов этот вклад в (A.12) дает световой сдвиг нижнего атомного уровня как целого. Так что мы выкинем этот член при дальнейшем рассмотрении, правда он все же проявляет себя в виде дисперсионной зависимости, которой мы пренебрегаем по сравнению с дифракционными эффектами.

Приложение Б

Пространственные флуктуации плотности атомов

В этом приложении мы рассмотрим флуктуации, вносимые в изучаемый механизм квантовой памяти для света случайностью расположения атомов.

В разделе 1.2 мы уже использовали приближение, согласно которому атомы в течение записи остаются ориентированными по x , т.е. $\langle J_x^a \rangle \sim 1/2$. Квантовая флуктуация x - проекции атомного момента при этом считается малой и не учитывается. Выделим классическую флуктуацию плотности этой наблюдаемой, порождаемую случайностью расположения атомов в поперечном сечении тонкого слоя. В конкретной реализации расположения атомов двумерная плотность проекции атомного момента определяется как

$$J_x(\vec{\rho}) = \sum_a^{nS} \langle J_x^a \rangle \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_a). \quad (\text{Б.1})$$

Здесь n - средняя поверхностная плотность числа атомов, S - произвольно большая поперечная площадь слоя. Образует с помощью (Б.1) корреляционную функцию и проведем усреднение по случайному положению каждого из атомов как показано ниже:

$$\overline{\dots}^a = \frac{1}{S} \int d\vec{\rho}_a \dots$$

Нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \overline{\langle J_x(\vec{\rho}) J_x(\vec{\rho}') \rangle} &= \sum_{a \neq b} \langle J_x^a \rangle \langle J_x^b \rangle \overline{\delta(\vec{\rho}_a - \vec{\rho}) \delta(\vec{\rho}_b - \vec{\rho}')}^{a,b} + \sum_a \langle J_x^a \rangle^2 \overline{\delta(\vec{\rho}_a - \vec{\rho}) \delta(\vec{\rho}_a - \vec{\rho}')}^a \\ &= \langle J_x^a \rangle^2 \{n^2 + n\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}')\}. \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

Квантовое усреднение факторизовано по предположению, что квантовой флуктуации нет. Можно представить распределение амплитуды атомного момента как сумму пространственно однородной части и флуктуационной добавки $\delta J_x(\vec{\rho})$, подобранной так, чтобы корреляционная функция имела обоснованный выше вид (Б.2):

$$\begin{aligned}\langle J_x(\vec{\rho}) \rangle &= n \langle J_x^a \rangle + \delta J_x(\vec{\rho}), \\ \overline{\delta J_x(\vec{\rho})} &= 0, \quad \overline{\delta J_x(\vec{\rho}) \delta J_x(\vec{\rho}')} = n \langle J_x^a \rangle^2 \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}').\end{aligned}\tag{Б.3}$$

Для образов Фурье находим

$$\begin{aligned}j_x(\vec{q}) &= (2\pi)^2 n \langle J_x^a \rangle \delta(\vec{q}) + \delta j_x(\vec{q}), \\ \overline{\delta j_x(\vec{q}) \delta j_x^\dagger(\vec{q}')} &= (2\pi)^2 n \langle J_x^a \rangle^2 \delta(\vec{q} - \vec{q}').\end{aligned}\tag{Б.4}$$

Здесь следует сказать, что флуктуационную добавку $\delta J_x(\vec{\rho})$ можно считать малой по сравнению со средней плотностью $n \langle J_x^a \rangle$ только если имеется в виду сглаженное по некоторой площадке S_{av} распределение. Обычная оценка для относительной флуктуации величины, подчиняющейся статистике Пуассона, через среднее число событий (попаданий атомов на выбранную площадку) дает

$$\frac{\delta J_x(\vec{\rho})}{n \langle J_x^a \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{n S_{av}}} \ll 1,\tag{Б.5}$$

т.е. величина $1/\sqrt{n S_{av}} \ll 1$ является малым параметром приближения. В области переменных Фурье сглаживание по такой площадке означает, что учитываются только пространственные частоты, для которых $S_{av} > (\pi/q)^2$.

Приложение В

Матрица корреляции усредненных квадратурных амплитуд сжатого света

Корреляционная функция образов Фурье квадратур, входящая в (2.46), находится с помощью известных свойств пространственно многомодовых сжатых состояний света. Они были описаны, например, в работах [10, 60] по голографической телепортации. Преобразование сжатия амплитуд $C(\vec{\rho}, t)$ вакуумного поля, проходящего на вход нелинейного кристалла, в представлении Фурье имеет вид

$$s(\vec{q}, \Omega) = U(\vec{q}, \Omega)c(\vec{q}, \Omega) + V(\vec{q}, \Omega)c^\dagger(-\vec{q}, -\Omega). \quad (\text{B.1})$$

Свойства сжатых состояний определяются коэффициентами U и V , которые, в свою очередь, зависят от характеристик оптического параметрического усилителя. Коэффициенты преобразования сжатия удовлетворяют условиям

$$|U(\vec{q}, \Omega)|^2 - |V(\vec{q}, \Omega)|^2 = 1, \quad (\text{B.2})$$

$$U(\vec{q}, \Omega)V(-\vec{q}, -\Omega) = U(-\vec{q}, -\Omega)V(\vec{q}, \Omega),$$

которые обеспечивают сохранение коммутационных соотношений для свободного поля.

Имея определение преобразования сжатия можно вычислить корреляторы квадратурных компонент, которые дают вклад в шум квантовой памяти. Образы Фурье вещественных квадратурных амплитуд $X_L^{(sq)}(\vec{\rho}, t)$, $P_L^{(sq)}(\vec{\rho}, t)$ есть

$$X_L^{(sq)}(\vec{q}, \Omega) = \frac{s(\vec{q}, \Omega) + s^\dagger(-\vec{q}, -\Omega)}{\sqrt{2}}, \quad P_L^{(sq)}(\vec{q}, \Omega) = \frac{s(\vec{q}, \Omega) - s^\dagger(-\vec{q}, -\Omega)}{\sqrt{2}i}. \quad (\text{B.3})$$

Подставляя выражение для сжатого поля, получаем следующее выражение для X_L квадратуры,

$$X_L^{(sq)}(\vec{q}, \Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [U(\vec{q}, \Omega) + V^*(-\vec{q}, -\Omega)]c(\vec{q}, \Omega) + [U^*(-\vec{q}, -\Omega) + V(\vec{q}, \Omega)]c^\dagger(-\vec{q}, -\Omega) \}. \quad (\text{B.4})$$

После усреднения по вакуумному состоянию поля на входе в кристалл, находим входящую в (2.46) корреляционную функцию:

$$\langle X_L^\dagger(\vec{q}, \Omega) X_L(\vec{q}', \Omega') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{q}') \delta(\Omega - \Omega') \cdot \frac{1}{2} |U^*(-\vec{q}, -\Omega) + V(\vec{q}, \Omega)|^2. \quad (\text{B.5})$$

Здесь мы учли, что в принятой нормировке полей коммутационные соотношения выглядят как

$$[c^\dagger(\vec{q}, \Omega), c(\vec{q}', \Omega')] = (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{q}') \delta(\Omega - \Omega').$$

Определим функцию Грина квадратуры шума $X_L^{(sq)}$ как

$$G_X(\vec{q}, \Omega) = |\xi_X(\vec{q}, \Omega)|^2, \quad \xi_X(\vec{q}, \Omega) = U^*(-\vec{q}, -\Omega) + V(\vec{q}, \Omega), \quad (\text{B.6})$$

что дает

$$\langle X_L^\dagger(\vec{q}, \Omega) X_L(\vec{q}', \Omega') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{q}') \delta(\Omega - \Omega') \cdot \frac{1}{2} G_X(\vec{q}, \Omega). \quad (\text{B.7})$$

При расчете корреляционной функции ортогональной квадратуры поля аналогично определяем

$$G_P(\vec{q}, \Omega) = |\xi_P(\vec{q}, \Omega)|^2, \quad \xi_P(\vec{q}, \Omega) = -U^*(-\vec{q}, -\Omega) + V(\vec{q}, \Omega), \quad (\text{B.8})$$

откуда находим

$$\langle P_L^\dagger(\vec{q}, \Omega) P_L(\vec{q}', \Omega') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{q}') \delta(\Omega - \Omega') \cdot \frac{1}{2} G_P(\vec{q}, \Omega). \quad (\text{B.9})$$

Учитывая эти определения в (2.46), получаем

$$C^{P(sq)}(i, j) = \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{1}{ST} \int_S d\vec{\rho}' d\vec{\rho}'' \int_T dt' dt'' \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \exp[i(-\vec{q}(\vec{\rho}' - \vec{\rho}'' + \vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j) + \Omega(t' - t''))] \frac{1}{2} G_X(\vec{q}, \Omega).$$

Интегралы по поверхности пикселей и времени накопления порождают четные дельтаобразные весовые функции

$$B_\Delta(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi\Delta)^2} \left| \int_S d\vec{\rho} e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} \right|^2 = \frac{\Delta^2}{(2\pi)^2} \text{sinc}^2\left(\frac{q_x\Delta}{2}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{q_y\Delta}{2}\right) \xrightarrow{\Delta \rightarrow \infty} \delta(\vec{q}),$$

$$B_T(\Omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_T dt e^{i\Omega t} \right|^2 = \frac{T}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \delta(\Omega).$$

С их помощью записываем элемент матрицы корреляции шума в виде

$$C^{P(sq)}(i, j) = \int dq \int d\Omega B_\Delta(\vec{q}) B_T(\Omega) \exp[i(-\vec{q}(\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j))] \frac{1}{2} G_X(\vec{q}, \Omega). \quad (\text{B.11})$$

В условиях экспериментов по квантовой памяти время записи T много больше времени когерентности усиленного спонтанного параметрического рассеяния. На спектральном языке можно сказать, что введенная выше дельтаобразная функция от частоты много уже, чем полоса частот рассеяния и частотная зависимость функции Грина. Поэтому интеграл по Ω можно взять. Ввиду того, что функция Грина четная по пространственной частоте, окончательно представляем матрицу корреляции в виде

$$C^{P(sq)}(i, j) = \frac{1}{2} \int dq B_\Delta(\vec{q}) \cos[\vec{q}(\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j)] G_X(\vec{q}, 0). \quad (\text{B.12})$$

Если сжатия нет, то $G_X(\vec{q}, 0) = 1$ и $C^{P(sq)}(i, i) = 1/2$ в согласии с (2.29).

В обычно используемых параметрах сжатия функция Грина $G_X(\vec{q}, \Omega)$ имеет вид

$$G_X(\vec{q}) = e^{2r(\vec{q}, \Omega)} \cos^2 \psi(\vec{q}, \Omega) + e^{-2r(\vec{q}, \Omega)} \sin^2 \psi(\vec{q}, \Omega),$$

где $r(\vec{q}, \Omega)$ - степень сжатия, а $\psi(\vec{q}, \Omega)$ - угол поворота главной оси эллипса неопределенности для сжатого состояния. Эти параметры выражаются через

коэффициенты $U(\vec{q}, \Omega)$ и $V(\vec{q}, \Omega)$ в преобразовании сжатия (В.1):

$$\psi(\vec{q}, \Omega) = \frac{1}{2} \arg[U(\vec{q}, \Omega)V(-\vec{q}, -\Omega)],$$

$$e^{\pm r(\vec{q}, \Omega)} = |U(\vec{q}, \Omega)| \pm |V(\vec{q}, \Omega)|.$$

Для оптического параметрического усилителя с согласованием фаз первого типа коэффициенты $U(\vec{q}, \Omega)$ и $V(\vec{q}, \Omega)$ приводятся в работах [14, 59]

$$U(\vec{q}, \Omega) = \exp\{i[(k_z(\vec{q}, \Omega) - k)l - \delta(\vec{q}, \Omega)/2]\} [\cosh \Gamma(\vec{q}, \Omega) + \frac{i\delta(\vec{q}, \Omega)}{2\Gamma(\vec{q}, \Omega)} \sinh \Gamma(\vec{q}, \Omega)],$$

$$V(\vec{q}, \Omega) = \exp\{i[(k_z(\vec{q}, \Omega) - k)l - \delta(\vec{q}, \Omega)/2]\} \frac{g}{\Gamma(\vec{q}, \Omega)} \sinh \Gamma(\vec{q}, \Omega).$$

Здесь l длина нелинейного кристалла, $k_z(\vec{q}, \Omega)$ продольная компонента волнового вектора $\vec{k}(\vec{q}, \Omega)$ для волны с частотой $\omega + \Omega$ и поперечной компонентой \vec{q} . Безразмерная функция расстройки $\delta(\vec{q}, \Omega)$ есть

$$\delta(\vec{q}, \Omega) = (k_z(\vec{q}, \Omega)\vec{q}, \Omega) + k_z(-\vec{q}, -\Omega) - k_p) l \approx (2k - k_p)l + k_\Omega'' l \Omega^2 - q^2 l / k,$$

где k_p волновое число волны накачки, $k_p - 2k = 0$ в вырожденном случае. Здесь предполагалось параксиальное приближение. Параметр $\Gamma(\vec{q}, \Omega)$ определен следующим образом

$$\Gamma(\vec{q}, \Omega) = \sqrt{g^2 - \delta^2(\vec{q}, \Omega)/4}.$$

Вклад (В.12) в матрицу корреляции $C^P(i, j)$, который связан со сжатием X -квadrатуры считывающей световой волны в поляризации y , находится численно с учетом этих определений.

Матрица $\langle P_L^{(sq)\dagger}(i)P_L^{(sq)}(j) \rangle$ корреляции P -квadrатуры считывающей световой волны в поляризации y , усредненной по объему накопления (который задается площадью пиксела S и временем накопления T), получается из (2.46) при замене

$$\langle X_L^\dagger(\vec{q}', \Omega')X_L(\vec{q}'', \Omega'') \rangle \rightarrow \langle P_L^\dagger(\vec{q}', \Omega')P_L(\vec{q}'', \Omega'') \rangle.$$

Как нетрудно проследить, результат приводится к виду

$$\langle P_L^{(sq)\dagger}(i)P_L^{(sq)}(j) \rangle = \frac{1}{2} \int dq B_\Delta(\vec{q}) \cos[\vec{q}(\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j)] G_P(\vec{q}, 0), \quad (\text{B.13})$$

где функция Грина для P – квадратуры сжатого света есть

$$G_P(\vec{q}) = e^{2r(\vec{q}, \Omega)} \sin^2 \psi(\vec{q}, \Omega) + e^{-2r(\vec{q}, \Omega)} \cos^2 \psi(\vec{q}, \Omega). \quad (\text{B.14})$$

Приложение Г

Средняя верность на пиксел

Средняя верность на пиксел была найдена в бакалаврском дипломе Васильева Д.В. и в [10]. Ниже частично использован, с учетом нужных изменений, текст из указанной работы.

Для больших $N = M \times M$ массивов квадратных пикселей, матрица корреляции становится трансляционно инвариантна и может быть диагонализирована при помощи дискретного Фурье преобразования. Рассмотрим периодические граничные условия, введем собственное значение для заданного волнового вектора

$$\lambda(\vec{q}_{\vec{n}}) = \sum_{\vec{j}} \mathcal{C}(\vec{j}, 0) e^{-i\vec{q}_{\vec{n}} \cdot \vec{\rho}_{\vec{j}}}. \quad (\text{Г.1})$$

Здесь $\vec{j} = (j_x, j_y)$ с целым числом $j_{x,y}$ является двумерным индексом положения пикселя. Двумерный волновой вектор собственной функции задается как $\vec{q}_{\vec{n}} = (2\pi/M\Delta)\vec{n}$, где $\vec{n} = (n_x, n_y)$, $n_{x,y}$ целое число и $|n_{x,y}| \leq (M-1)/2$ (мы взяли M нечетным для простоты). В терминах непрерывного Фурье преобразования уравнение (Г.1) записывается как,

$$\lambda(\vec{q}) = \int d\vec{\rho} \left\{ \sum_{\vec{j}} \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_{\vec{j}}) \right\} \mathcal{C}(\vec{\rho}, 0) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{\rho}}, \quad (\text{Г.2})$$

оно связано со сверткой Фурье преобразований подынтегральных множителей. Здесь мы используем соотношение:

$$\int d\vec{\rho} \left\{ \sum_{\vec{j}} \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_{\vec{j}}) \right\} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{\rho}} = \left(\frac{2\pi}{\Delta} \right)^2 \sum_{\vec{m}} \delta(\vec{q} - \frac{2\pi}{\Delta} \vec{m}), \quad (\text{Г.3})$$

где $\vec{m} = (m_x, m_y)$, $m_{x,y}$ целое число. Фурье преобразование $\mathcal{C}(\vec{\rho}, 0)$ легко почить из (В.11). Если в этом равенстве отказаться от требования, что $\vec{\rho}_i, \vec{\rho}_j$ – дискретные координаты центров пикселей, то оно как раз определяет

нужный образ для непрерывного преобразования Фурье. Собственное число диагонализированной матрицы корреляции получаем в виде

$$\lambda(\vec{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{m}} \text{sinc}^2 \left(\frac{q_x \Delta}{2} - \pi m_x \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{q_y \Delta}{2} - \pi m_y \right) G_X \left(\vec{q} - \frac{2\pi}{\Delta} \vec{m} \right). \quad (\text{Г.4})$$

Верность выражается через матрицы корреляции с помощью (2.27). Напомним, что в этом расчете мы считаем плотность атомов в поперечном сечении однородной, и матрица корреляции X -квадратуры шума во входном сигнале нулевая, $C^X(i, j) = 0$. В пределе $M \rightarrow \infty$, средняя верность на пиксель находится в виде

$$F_{av} = \sqrt[N]{F_N} = \prod_{\vec{n}} \left(1 + \frac{1}{2} + \lambda(\vec{q}_{\vec{n}}) \right)^{-1/2N} = \quad (\text{Г.5})$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{2\pi} \right)^2 \int_{|q_{x,y}| \leq \pi/\Delta} d\vec{q} \ln \left(1 + \frac{1}{2} + \lambda(\vec{q}) \right) \right\}.$$

Для конкретных значений параметров сжатия и относительного размера пиксела средняя верность на пиксел находится численным интегрированием.