Комплексные Кэлеровы многообразия и квантовая когерентность

По материалам доклада проф. А.В. Горохова,
Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С.П. Королева,
ФЭКС-2021

https://clck.ru/Z2tqk

Решетников Даниил

d.d.reshetnikov@gmail.com

Постановка задачи

- Описать эволюцию квантовых систем используя метод квантования динамических систем, фазовые пространства которых являются многообразиями Кэлера с неевклидовой метрикой

https://clck.ru/Z2snW

COVARIANT AND CONTRA VARIANT SYMBOLS OF OPERATORS
F. A. BEREZIN, 1972

План доклада

- 1. Метод динамических групп и когерентных состояний в квантовой теории
- 2. Пространство параметров когерентного состояния, многообразия Кэлера
- 3. Динамика когерентных состояний для двухуровневого атома
- 4. Динамика системы двух двухуровневых атомов с учетом диполь-дипольного взаимодействия
- 5. Выводы и результаты

Система обобщенных когерентных состояний

- Рассмотрим множество векторов: $|\Psi_g\rangle = \hat{T}(g)|\Psi_0\rangle$

$\hat{T}(g)$ – унитарное представление группы G, действующее в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$

Пусть $H = \{h\}$ - множество элементов группы G, таких, что

$\hat{T}(h)|\Psi_0\rangle = e^{i\alpha(h)}|\Psi_0\rangle$

Обозначим множество $X = gH$ классов смежности G/H.

Выбирая в каждом классе по одному представителю группы G $g(x)$,

получаем множество состояний $\{|x\rangle\}$, где

$|x\rangle = \hat{T}(g(x))|\Psi_0\rangle, x \in X = G/H, \; |x\rangle \in \mathcal{H}$

Когерентные состояния

- Подействуем оператором $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^{+} - \bar{\alpha}\hat{a}}$ на вакуумный вектор $|0\rangle$,

определяемый условием $\hat{a}|0\rangle = 0,\ \langle 0|0\rangle = 1$:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}|0\rangle = e^{\alpha\hat{a}^{+} - \bar{\alpha}\hat{a}}|0\rangle.$$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

Операторы рождения и уничтожения вместе с единичным оператором $\hat{I}$ порождают алгебру Ли – алгебру Гейзенберга-Вейля. Оператор представления группы Г-В:

$$\hat{T}(g) = e^{i\theta\hat{I}}\hat{D}(\alpha)$$

$$|\alpha\rangle = \hat{T}(g)|0\rangle$$

Выбор начального состояния

- Для спиновых когерентных состояний необходимо выбрать таким образом, чтобы минимизировались величины

$$\Delta\hat{\vec{J}}^2 = \Delta\hat{J}_1^2 + \Delta\hat{J}_2^2 + \Delta\hat{J}_3^2 = \langle\hat{\vec{J}}^2\rangle - \langle\vec{J}\rangle^2$$

- В таком случае можно доказать, что

$$|\Psi_0\rangle = |j, j\rangle \qquad \text{или} \qquad |\Psi_0\rangle = |j, -j\rangle$$

$$|\Psi_0\rangle = |j, -j\rangle \equiv |0\rangle$$

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2, \qquad \hat{J}_0 = \hat{J}_3$$

$$|z\rangle = (1 + z\bar{z})^{-j} e^{z\hat{J}_+}|0\rangle$$

https://clck.ru/Z3hts

А.М. Переломов. Обобщенные когерентные состояния. Случай простейших групп Ли, 1983

Гамильтониан, линейный по генераторам группы

- Пусть гамильтониан квантовой системы линеен по генераторам $\hat{A}_k$ представления $\hat{T}(G)$:

$$\hat{H} = \sum_k h^k \hat{A}_k.$$

- Группа SU(2):

$$\hat{H}(t) = A(t)\hat{J}_+ + \bar{A}(t)\hat{J}_- + B\hat{J}_0$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle = A(t)\hat{J}_+ + \bar{A}(t)\hat{J}_- + B\hat{J}_0|\Psi(t)\rangle$$

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\phi(t)}|z(t)\rangle\ , \quad |z\rangle = (1+z\bar{z})^{-j}e^{z\hat{J}_+}|0\rangle$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|z(t)\rangle = (\hat{H} - \dot{\phi})|z(t)\rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned} i\dot{z} &= A - \bar{A}z^2 + Bz, \\ \dot{\phi} &= j(\bar{z}A + z\bar{A} - B). \end{aligned}}$$

Многообразие Кэлера в пространстве когерентных состояний

$$\hat{H} = \sum_{s_1,\dots,s_r} \omega_{s_1 \dots s_r} \hat{A}_1^{s_1} \cdots \hat{A}_r^{s_r}, \; r - \text{число параметров в группе } G$$

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T}_D \, exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int\limits_{t_0}^{t} \hat{H}(\tau) \, d\tau \right]$$

Построим базис когерентных состояний на группе G:

$$\forall g_\xi \in \mathcal{X} = G/G_0 \;\longmapsto\; |\xi >= \hat{T}(g_\xi)|0 >$$

Введем локальные комплексные координаты:

$$\xi \longmapsto z \equiv (z^1, \dots, z^n), \quad 2n = dim(G/G_0)$$

Многообразие Кэлера в пространстве когерентных состояний

Реализуем гильбертово пространство состояний в виде пространства голоморфных функций:

$$|\Psi> \longmapsto \Psi(z) = < z|\Psi > / < z|0 >, \quad |z > \equiv |\xi(z^1, \ldots, z^n) >$$

Действие оператора унитарного представления можно представить следующим образом:

$$\Psi(z) = \int\limits_{\mathcal{X}} K(z, \bar{w})\, \Psi(w)\, \exp\left[-\rho(w, \bar{w})\right]\, d\mu(w, \bar{w})$$

$$K(z, \bar{w}) = < z|w > / < z|0 >< 0|w >$$

$$\rho(z, \bar{z}) = 2\, ln\, | < z|0 > |$$

Многообразие Кэлера в пространстве когерентных состояний

Инвариантная дифференциальная 2-форма:

$$\omega^2 = i \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \, ln \, K(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \, \partial \bar{z}^\beta} \, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

Каждому оператору $\hat{F}$ в пространстве векторов состояния системы поставим в соответствие ковариантный символ $\mathcal{F}(z, \bar{z})$:

$$\left(\hat{F}\,\Psi\right)(z) = \int\limits_{\mathcal{X}} \mathcal{F}(z, \bar{w}) \, \frac{K(z, \bar{w})}{K(w, \bar{w})} \, \Psi(w) d\mu(w, \bar{w})$$

$$\mathcal{F}(z, \bar{w}) = \frac{< z|\hat{F}|w >}{< z|w >}$$

Многообразие Кэлера в пространстве когерентных состояний

Произведению операторов ставится в соответствие их свертка:

$$\mathcal{F}(z,\bar{z}) = \int\limits_{\mathcal{X}} \mathcal{F}_1(z,\bar{w})\,\mathcal{F}_2(w,\bar{z})\,\frac{K(z,\bar{w})\,K(w,\bar{z})}{K(z,\bar{z})\,K(w,\bar{w})}\,d\mu(w,\bar{w})$$

Скобка Пуассона определена следующим образом:

$$\{\mathcal{F}_1,\,\mathcal{F}_2\}(z,\bar{z}) = \frac{i}{\hbar}\sum_{\alpha,\bar{\beta}} g^{\alpha\bar{\beta}}\left[\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial z^\alpha}\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\bar{z}^\beta} - \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\bar{z}^\beta}\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial z^\alpha}\right]$$

$$\boxed{\dot{z}^\alpha = \{z^\alpha, \mathcal{H}\}}$$

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \partial^2\, ln\, K(z,\bar{z})/\partial z^\alpha\,\partial\bar{\beta}$$

Если квантовым операторам ставятся в соответствие функции на фазовом пространстве, то символ оператора эволюции представляется в виде интеграла по траекториям в фазовом пространстве

Динамика когерентного состояния кубита

Ковариантный символ гамильтониана $\hat{H}(t) = A(t)\hat{J}_+ + \bar{A}(t)\hat{J}_- + B\hat{J}_0$:

$$H(z,\bar{z}) = j\hbar[2A(t)\bar{z} + 2\bar{A}(t)z + \omega_0(z\bar{z} - 1)](1 + z\bar{z})^{-1}$$

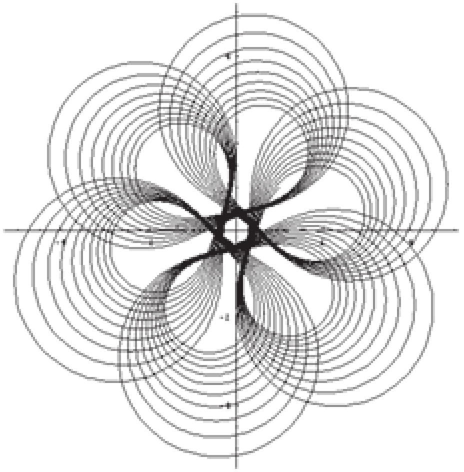
$$g^{\alpha\bar{\alpha}} = (1+z\bar{z})/2j$$

Дифференциальное уравнение динамики когерентных состояний:

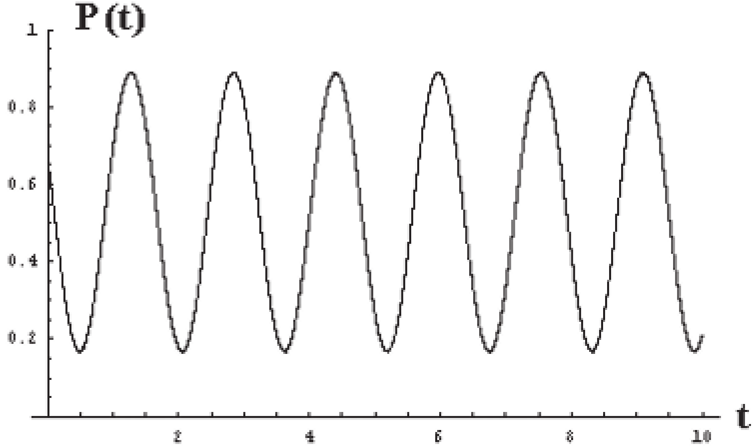
$$i\dot{z} = A(t) + \omega_0\, z - \bar{A}(t)\, z^2$$

$$A(t) = A\,\exp(-i\omega\, t)$$

Численное решение уравнения Рикатти



а



б

$$P(t) = \frac{A^2 \sin^2 \Omega\, t}{(\omega - \omega_0)^2 + A^2}$$

$$\Omega = (1/2)\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + A^2}$$

$$z(0) = 1 + i,\ \omega_0 = 1,\ \omega = 2/3,\ A = 2$$

Система двух двухуровневых атомов с учетом диполь-дипольного взаимодействия

Оператор Гамильтона такой системы:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_1(t) + \hat{H}_2(t) + \hat{H}_{dd}$$

$$\hat{H}_j(t) = \omega_0 \widehat{S}_3^{(j)} + \chi_j(t)\widehat{S}_+^{(j)} + \bar{\chi_j}(t)\widehat{S}_-^{(j)}, \;\; \chi_j(t) = \chi_{0j} e^{-i\omega t}$$

$$\widehat{S}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}_{dd} = \Omega_{12}(\widehat{S}_+^{(1)}\widehat{S}_-^{(2)} + \widehat{S}_-^{(1)}\widehat{S}_+^{(2)})$$

Система двух двухуровневых атомов с учетом диполь-дипольного взаимодействия

Перейдем к ковариантным символам:

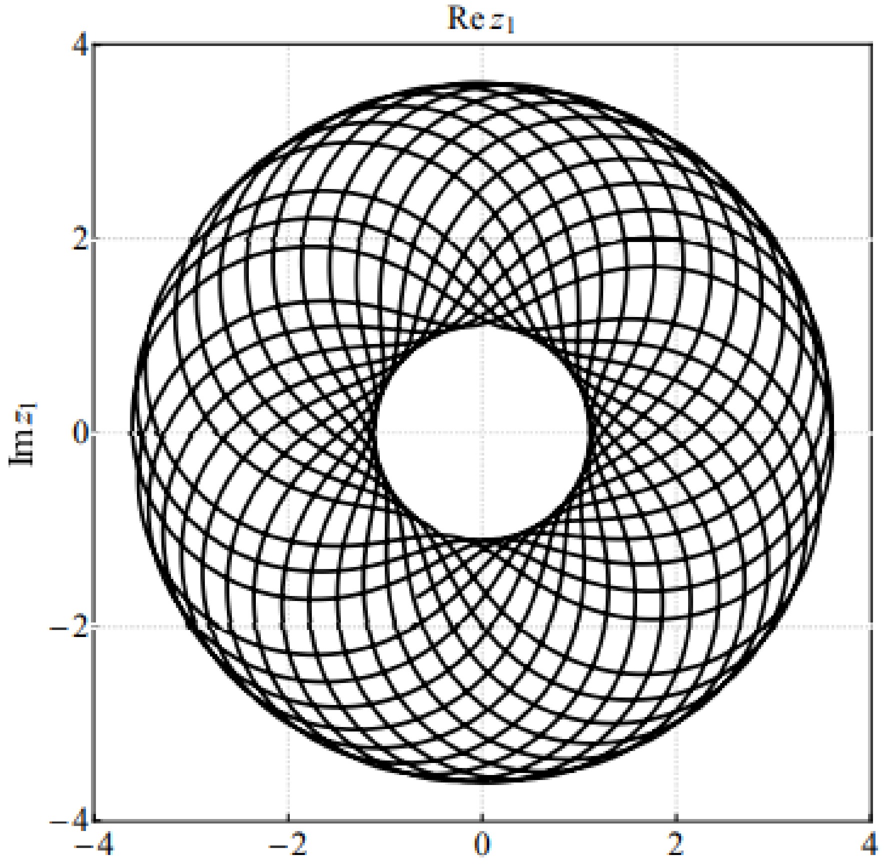
$$\mathcal{H} = \langle z_1, z_2 | \widehat{H} | \bar{z_1}, \bar{z_2} \rangle$$

$$\boxed{\dot{z}^{\alpha} = \{ z^{\alpha}, \mathcal{H} \}}$$

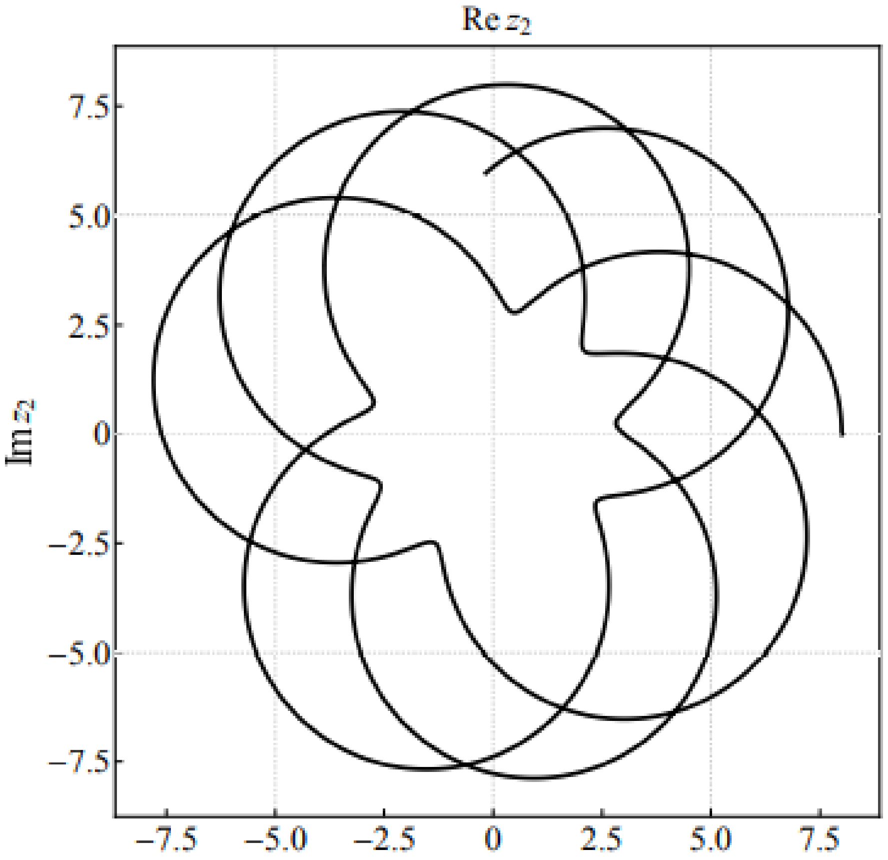
$$\dot{z_1} = -i(1 + z_1 \bar{z_1})^2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z_1}}, \quad \dot{z_2} = -i(1 + z_2 \bar{z_2})^2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z_2}}$$

$$\begin{cases} \dot{z_1} = -i\omega_0 z_1 - \chi_1(t) z_1^2 + \bar{\chi_1}(t) + \Omega_{12} \frac{z_2 + \bar{z_2} z_1^2}{1 + z_2 \bar{z_2}}, \\ \dot{z_2} = -i\omega_0 z_2 - \chi_2(t) z_2^2 + \bar{\chi_2}(t) + \Omega_{12} \frac{z_1 + \bar{z_1} z_2^2}{1 + z_1 \bar{z_1}}. \end{cases}$$

Численное моделирование



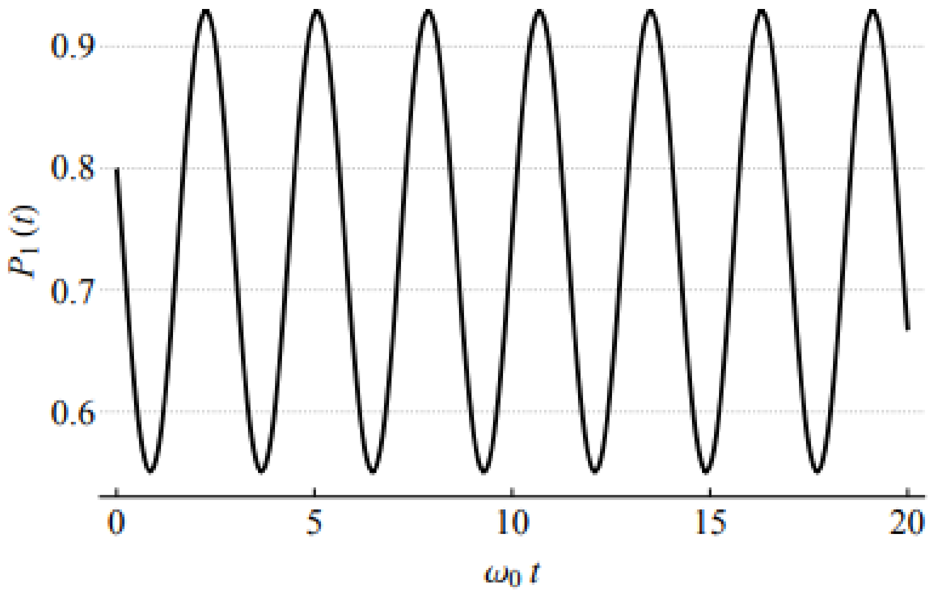
$z_1(0) = 2i,\ \omega_0 = 1,\ \omega = 0.999,\ \chi_1 = 0.5$

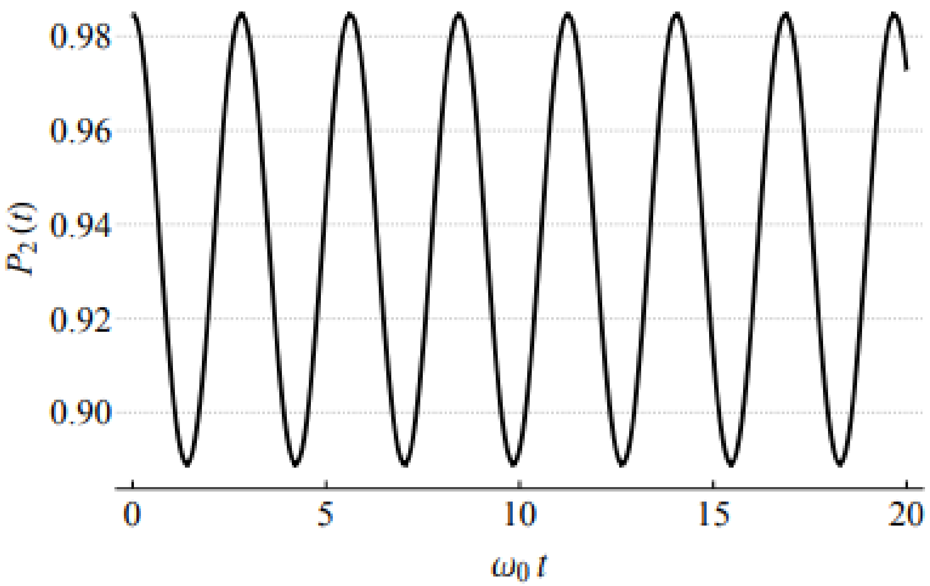


$z_2(0) = 8,\ \omega_0 = 1,\ \omega = 0.999,\ \chi_2 = 0.5$

Численное моделирование

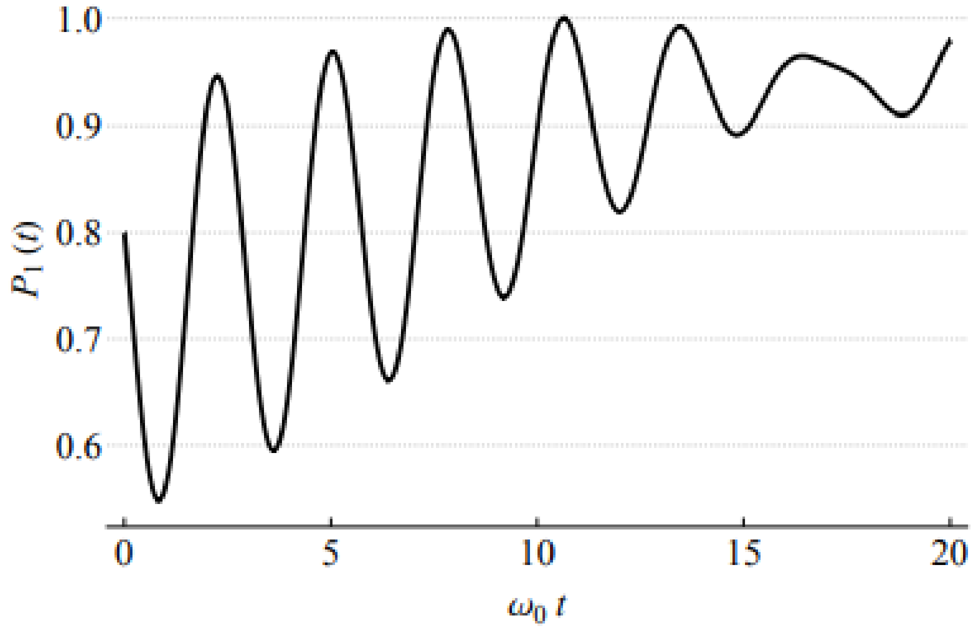
$$P_j = \frac{z_j \bar{z}_j}{1 + z_j \bar{z}_j}$$



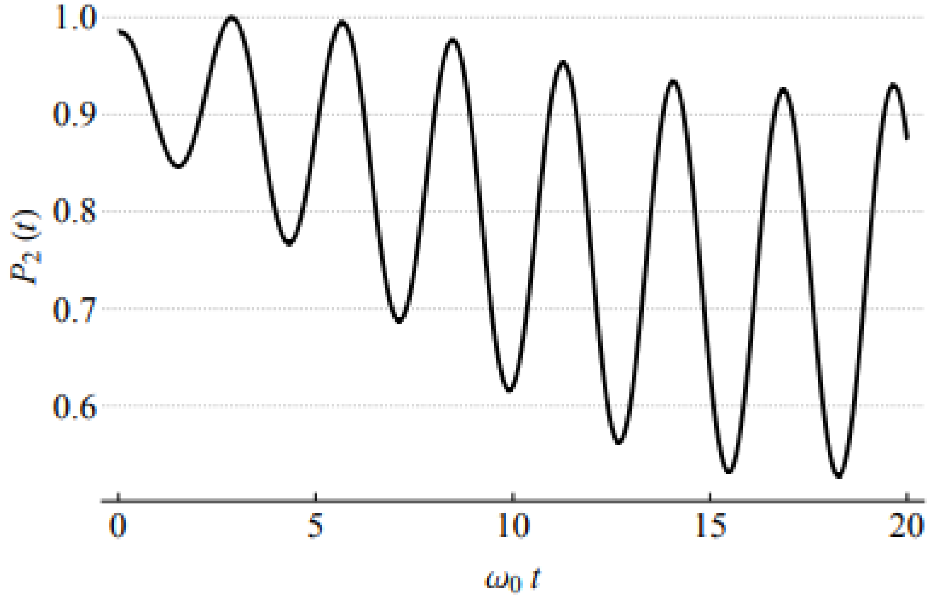


Численное моделирование с учетом диполь-дипольного взаимодействия

$$P_j = \frac{z_j \bar{z}_j}{1 + z_j \bar{z}_j}$$



$z_1(0) = 2i, \ \omega_0 = 1, \omega = 0.999, \chi_1 = 0.5, \Omega_{12} = 0.1$



$z_2(0) = 8, \ \omega_0 = 1, \omega = 0.999, \chi_2 = 0.5, \Omega_{12} = 0.1$

Выводы

- 1. Метод когерентных состояний позволяет свести задачу нахождения волновой функции к более простой классической задачи
- 2. В построенном фазовом пространстве функций символ оператора эволюции квантовой системы может быть найден как интеграл по траекториям в фазовом пространстве
- 3. Рассмотрение группы SU(4) вместо вложения SU(2)xSU(2) позволяет дополнительно описывать перепутывание однокубитных квантовых состояний за счет появления дополнительного параметра когерентных состояний