

# Вращающийся волчок

Денис Сычев

1 июня 2020 г.

## 0.1 Введение

Цель работы - изучить поведение вращающегося волчка при разных значениях скорости прецессии, нутации и собственных вращениях. Кроме того, изучить физику волчка Томсона, способного совершать переворот относительно оси симметрии.

Для достижения цели необходимо выполнить следующие задачи:

- Изучить кинематические и динамические уравнения Эйлера, характеризующие вращательное движение ;
- Получить Лагранжиан и Гамильтониан для волчка;
- Построить график движение центра масс волчка;
- Изучить движение волчка Томсона.

## 0.2 Кинематические уравнения Эйлера

Введем кинематические уравнения Эйлера, с помощью которых определяется положение точек в пространстве для сферического движения. Сферическим движением твердого тела называют такое движение, при котором одна точка тела остается все время неподвижной. Очевидно, траектории всех точек тела при таком движении располагаются на поверхностях сфер [1]. Введем две системы координат: неподвижную декартову ( $OXYZ$  на рис. 1), привязанную к точке вращения тела, и подвижную - связанную с главной осью волчка ( $OX'Y'Z'$  на рис.1). Далее введем углы Эйлера, определяющие три поворота системы, с помощью которых можно привести любое положение системы к текущему. Обозначим  $\psi(t)$  - угол собственного вращения,  $\phi(t)$ - угол прецессии,  $\theta(t)$  - угол нутации. В данной задаче все три угла зависят от времени.

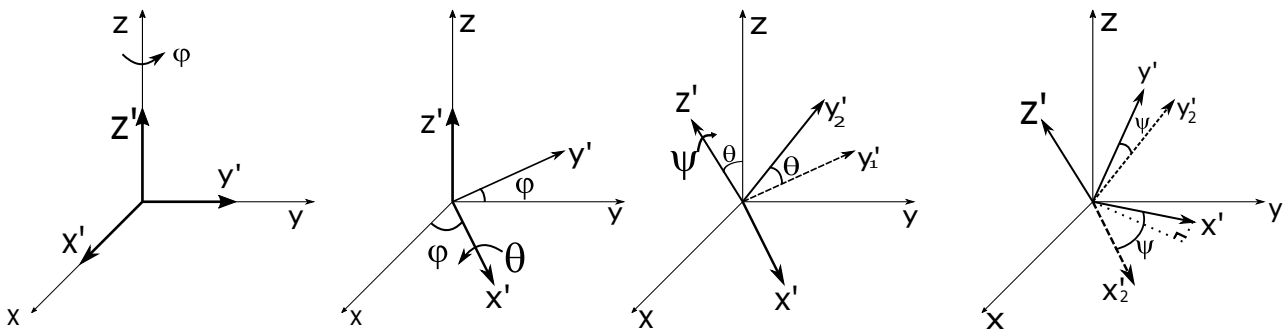


Рис. 1: Углы Эйлера

Тогда итоговая картинка получается такой:

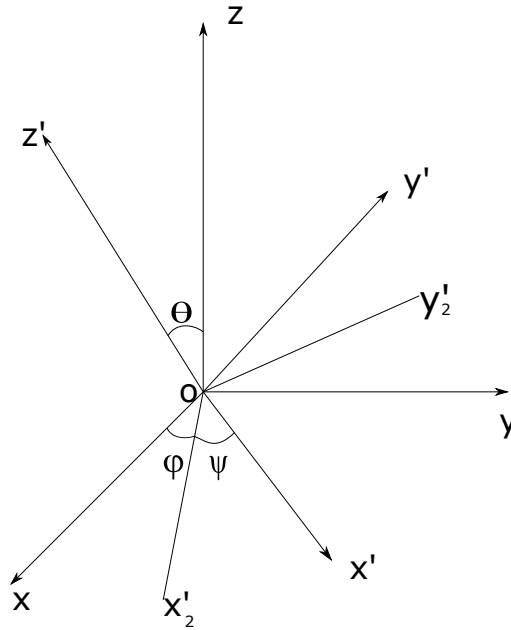


Рис. 2: Углы Эйлера

Для получения уравнений Эйлера, нам потребуется ввести прямую  $OX'_2$ , являющейся линией пересечения плоскостей  $OXY$  и  $OX'Y'$ , а так же прямую  $OY'_2$ , полученной при пересечении при пересечении плоскости  $OXY$  и  $OZZ'$ . Тогда угол  $\theta$  - угол  $ZOZ'$ ,  $\phi$  - угол  $X'_2OX$ ,  $\psi$  - угол  $X'OX'_2$ , так же по построению,  $\phi$  - угол  $Y'_2OY$ . вектор  $\vec{\omega}_1$  сонаправлен с  $OZ$ ,  $\vec{\omega}_3$  - сонаправлен с  $OX'_2$ ,  $\vec{\omega}_2$  - сонаправлен с  $OZ$ . Тогда суммарную угловую скорость можно найти как векторную сумму тройки векторов  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$ . С другой стороны, скорость  $\omega$  имеет три проекции на оси  $OX' OY' OZ'$  со следующими компонентами:

$$\begin{cases} \omega_{x'} = \omega_{1x'} + \omega_{2x'} + \omega_{3x'}, \\ \omega_{y'} = \omega_{1y'} + \omega_{2y'} + \omega_{3y'}, \\ \omega_{z'} = \omega_{1z'} + \omega_{2z'} + \omega_{3z'}. \end{cases} \quad (1)$$

Проекции  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  на оси  $OX' OY' OZ'$  выглядят следующим образом:

- проекции  $\omega_1$ :

$$\omega_{1x'} = \omega_{1y'} = 0, \omega_{1z'} = \dot{\psi};$$

- для того, чтобы определить проекции  $\omega_2$ , сначала необходимо спроецировать вектор на  $OY'_2$  и только после этого на оси  $OX'$  и  $OY'$ . В итоге получаем:

$$\omega_{2x'} = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \quad \omega_{2y'} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \quad \omega_{2z'} = \dot{\phi} \cos \theta;$$

- проекции  $\omega_3$ :

$$\omega_{3x'} = \dot{\theta} \cos \psi, \omega_{3y'} = -\dot{\theta} \sin \psi, \omega_{3z'} = 0.$$

Тогда итоговые компоненты угловой скорости:

$$\begin{cases} \omega'_{x'} = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega'_{y'} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega'_{z'} = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{cases} \quad (2)$$

Полученные уравнения называют кинематическими уравнениями Эйлера для подвижных осей.

### 0.3 Динамические уравнения Эйлера

Векторные уравнения движения [2]:

$$\begin{cases} \vec{P} = \vec{F}^e + \vec{R}^e; \\ \vec{M} = \vec{L}^e + \vec{L}_R^e, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$L_R^e = 0; \quad \vec{M} = \frac{d'M}{dt} + [\vec{\omega}\vec{M}]. \quad (4)$$

Так как оси подвижной системы координат  $OX'Y'Z'$  направлены по главным осям инерции, то справедливо разложение на соответствующие оси:

$$\frac{d'\vec{M}}{dt} = J_{x'}\vec{\omega}_{x'} + J_{y'}\vec{\omega}_{y'} + J_{z'}\vec{\omega}_{z'}; \quad (5)$$

$$[\vec{\omega}\vec{M}] = \begin{vmatrix} \vec{e}'_x & \vec{e}'_y & \vec{e}'_z \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ J_{x'}\omega_{x'} & J_{y'}\omega_{y'} & J_{z'}\omega_{z'} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Тогда

$$\begin{cases} J_{x'}\dot{\omega}_{x'} + (J_{z'} - J_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'} = L_{x'}^e, \\ J_{y'}\dot{\omega}_{y'} + (J_{x'} - J_{z'})\omega_{z'}\omega_{x'} = L_{y'}^e, \\ J_{z'}\dot{\omega}_{z'} + (J_{y'} - J_{x'})\omega_{x'}\omega_{y'} = L_{z'}^e. \end{cases} \quad (7)$$

Полученные равенства называются динамическими уравнениями Эйлера.

Существует несколько задач о вращении тела с одной неподвижной точкой под действием однородного поля тяжести [3]:

- Задача Эйлера (случай уравновешенного волчка) - когда центр масс и неподвижная точка совпадают, то есть не создается моментов инерции относительно неподвижной точки;
- Задача Лагранжа, когда моменты инерции относительно осей  $OX'$  и  $OY'$  равны, а центр масс и неподвижная точка находятся на оси  $OZ'$ . Роль сторонней силы играет вес ( $J_{x'} = J_{y'} \neq J_{z'}$ ),
- Задача Ковалевской, когда  $J_{x'} = J_{y'} = 2J_{z'}$ , а центр масс находится в плоскости  $O'X'Y'$ .

Кроме того, существуют еще и частные интегралы, зависящие от конкретных начальных условий.

### 0.4 Свободный симметричный волчок (Задача Эйлера)

Для свободных вращений  $M = 0$ . Для симметричного волчка

$$J_{x'} = J_{y'} \neq J_{z'}. \quad (8)$$

[3] Тогда из динамических уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} J_{x'}\dot{\omega}_{x'} + (J_{z'} - J_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'} = 0, \\ J_{y'}\dot{\omega}_{y'} + (J_{x'} - J_{z'})\omega_{z'}\omega_{x'} = 0, \\ J_{z'}\dot{\omega}_{z'} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Пусть

$$\frac{J_z - J_{x'}}{J_{x'}} \omega_{z'} = \Omega, \quad (10)$$

тогда

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{x'} + \Omega \omega_{y'} = 0, \\ \dot{\omega}_{y'} - \Omega \omega_{x'} = 0, \\ J_{z'} \dot{\omega}_{z'} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Умножая второе равенство на  $i$  и складывая с первым, получим:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{x'} + i\dot{\omega}_{y'} + i\Omega(\omega_{x'} + i\omega_{y'}) = 0, \\ \dot{\omega}_{z'} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Ищем решение в виде:

$$\omega_{x'} + i\omega_{y'} = Ae^{i\Omega t}. \quad (13)$$

Тогда

$$\begin{cases} \omega_{x'} = a \cos(\Omega t + \alpha), \\ \omega_{y'} = a \sin(\Omega t + \alpha), \\ \omega_{z'} = const. \end{cases} \quad (14)$$

По условию (8):

$$\begin{cases} L_{x'} = J_{x'} \omega_{x'}, \\ L_{y'} = J_{y'} \omega_{y'}, \\ L_{z'} = J_{z'} \omega_{z'}. \end{cases} \quad (15)$$

Отсюда видно,  $\vec{\omega}$  и  $\vec{L}$  совершают прецессию со скоростью  $\Omega$ .

## 0.5 Тяжелый симметричный волчок (Задача Лагранжа)

Из названия видно, что в рамках данной задачи необходимо учитывать вклад силы тяжести в движение тела.

Рассмотрим Лагранжиан для волчка с массой относительно подвижной системы координат.

Кинематические уравнения Эйлера для подвижной системы координат:

$$\begin{cases} \dot{\omega}'_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \dot{\omega}'_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \dot{\omega}'_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{cases} \quad (16)$$

$$L = T - U, \quad (17)$$

где

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 J_{ij} \omega_i \omega_j. \quad (18)$$

Из уравнений Эйлера:

$$T = \frac{1}{2} (J_1 (\dot{\theta}^2 \cos^2 \psi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \psi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi) + J_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2), \quad (19)$$

$$T = \frac{1}{2}J_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}J_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (20)$$

-кинетическая энергия вращения.

Потенциальная энергия:

$$U = Mgl \cos \theta. \quad (21)$$

Тогда Лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}J_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}J_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta. \quad (22)$$

Видно, что функция Лагранжа явно не зависит от  $\phi$  и  $\psi$ , тогда интегралы движения имеют вид:

$$\begin{cases} p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = J_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = \text{const} = A, \\ p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = J_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{const} = B. \end{cases} \quad (23)$$

Выражая из второго равенства  $B$  и подставляя его в первое, получим:

$$p_\phi = J_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_3 \frac{B}{J_3} \cos \theta = A. \quad (24)$$

Откуда

$$\dot{\phi} = \frac{A - B \cos \theta}{J_1 \sin^2 \theta}. \quad (25)$$

Полная механическая энергия с учетом(20) и (21) имеет вид:

$$E = T + U = \frac{1}{2}J_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}J_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta = \frac{1}{2}J_1\left(\dot{\theta}^2 + \frac{(A - B \cos \theta)^2}{J_1^2 \sin^2 \theta}\right) + \frac{1}{2} \frac{B^2}{J_3} + Mgl \cos \theta. \quad (26)$$

Умножив на 2 и разделив на  $J_1$ , имеем:

$$\dot{\theta}^2 + \frac{(A - B \cos \theta)^2}{J_1^2 \sin^2 \theta} - \frac{2}{J_1}\left(E - \frac{B^2}{J_3}\right) + \frac{2Mgl}{J_1} \cos \theta = 0. \quad (27)$$

Пусть

$$\alpha = \frac{2}{J_1}\left(E - \frac{B^2}{J_3}\right); \beta = \frac{2Mgl}{J_1}; \quad a = \frac{A}{J_1}; \quad b = \frac{B}{J_1}, \quad (28)$$

тогда уравнение (26):

$$\dot{\theta}^2 + \frac{(a - b \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} - \alpha + \beta \cos \theta = 0. \quad (29)$$

Также пусть

$$c = \cos \theta; \quad \dot{c} = -\dot{\theta} \sin \theta, \quad (30)$$

тогда выражение(28):

$$\dot{c}^2 + (a - bc)^2 - (\alpha - \beta c)(1 - c^2) = 0. \quad (31)$$

Обозначим  $f(c) = -(a - bc)^2 + (\alpha - \beta c)(1 - c^2)$ .

Тогда  $\dot{c}^2 = f(c)$ . Для существования решений необходимо, чтобы  $f(c) \geq 0$ .

Так как  $c = \cos \theta$ , то  $c \in [-1; 1]$ .

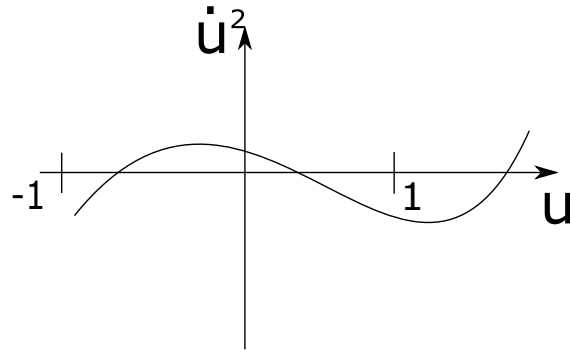


Рис. 3: график зависимости  $\dot{u}$  от  $u$

На границе отрезка  $f(\pm 1) = -(a-b)^2 < 0$ . Тогда  $\dot{c}^2 < 0$ . То есть, на концах данного отрезка движения волчка быть не может.

В общем случае волчок совершает прецессию на отрезке  $[c_1; c_2]$ . Известно, что (из формулы 25)

$$\dot{\phi} = \frac{A - B \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (32)$$

Тогда с учетом (31)

$$\dot{\phi} = \frac{a - bc}{1 - c^2}. \quad (33)$$

Из последнего видно, что  $\dot{\phi} = 0 \Leftrightarrow c_0 = \frac{a}{b}$ .

Рассмотрим три случая:

- $c_0 \notin [c_1; c_2]$ . Тогда  $\dot{\phi}$  не меняет знак, тогда график движения имеет вид синусоиды
- $c_0 = c_2$ .
- $c_0 \in [c_1; c_2]$ . Тогда  $\dot{\phi}$  меняет знак и тогда на графике будут петельки.

## 0.6 Фазовые портреты

В ходе работы были построены фазовые портреты движения точек волчка. Известно, что положение всех точек - поверхность сфер. Тогда введем сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x = r \cos \psi \sin \theta, \\ y = r \sin \psi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (34)$$

Пусть

$$r = 1, \varphi(t) = t, \psi(t) = t, \theta(t) = t, \quad (35)$$

тогда:

$$\begin{cases} x = \cos t \sin t, \\ y = \sin t \sin t, \\ z = \cos t. \end{cases} \quad (36)$$

Результаты построения графиков представлены на рисунках ниже.

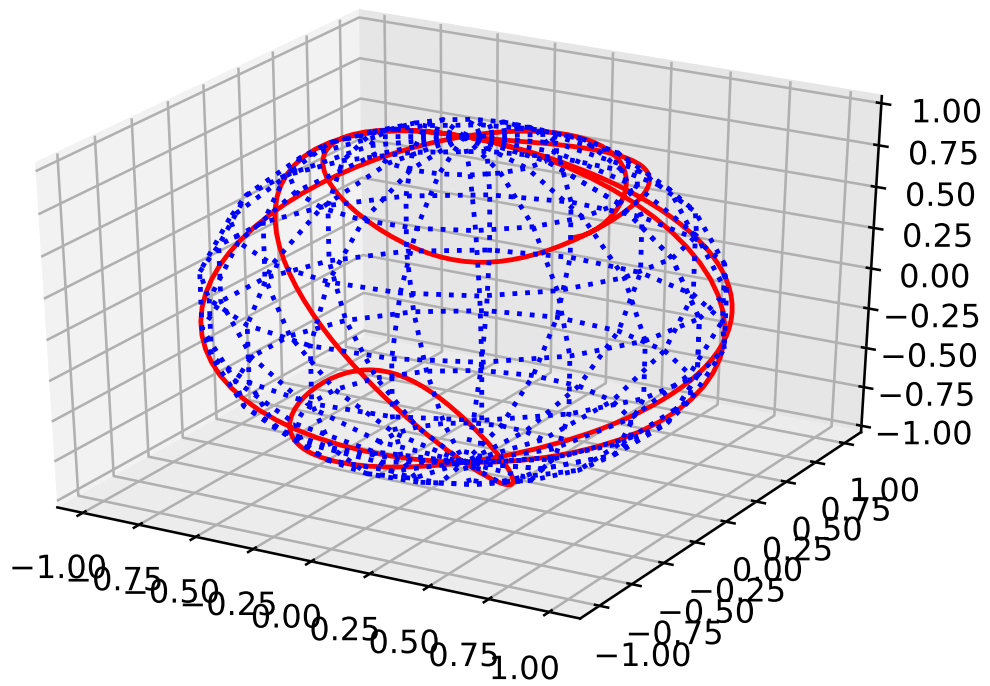


Рис. 4: Трехмерный график вращения

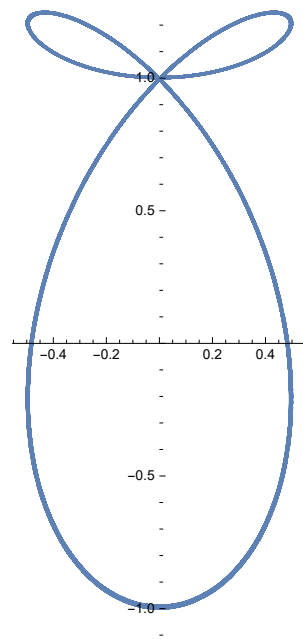


Рис. 5: Фазовый портрет относительно  $Ox$



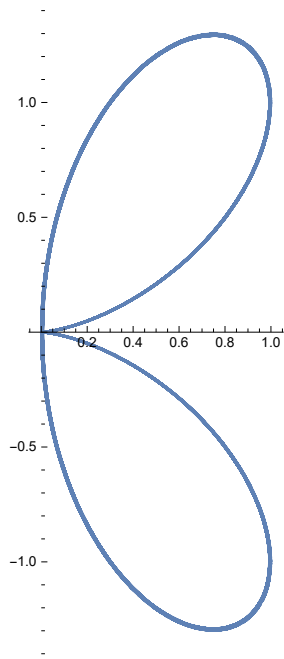


Рис. 6: Фазовый портрет относительно  $OY$

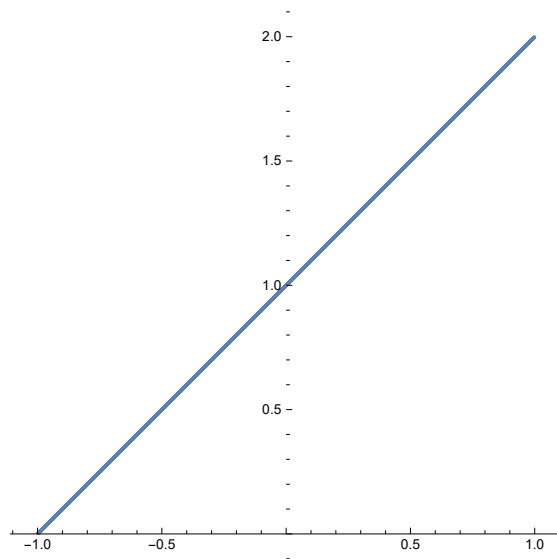


Рис. 7: Фазовый портрет относительно  $OZ$

## §2. Волчок Томсона.

Волчок Томсона (волчок тип-топ) - волчок, обладающий свойством переворачиваться в процессе вращения. В отличие от обычного волчка, китайский волчок обладает следующими свойствами:

- в процессе вращения точка касания меняет свое положение;
- при перевороте меняется направление вращения на противоположное;
- центр тяжести поднимается/опускается [4].

Такой волчок состоит из усеченного шара и стержня. В этой части работы исследовалось движение волчка тип-топ с целью ответа на вопрос о причинах его переворота. Для этого обратимся к рисунку 8 и введем некоторые условия:

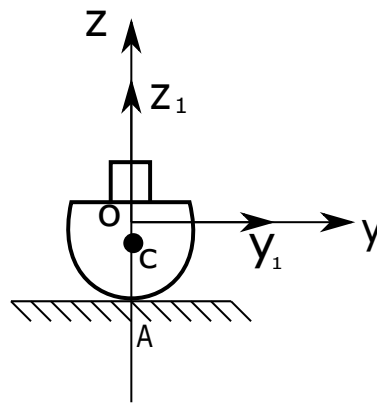


Рис. 8: Волчок Томсона

- пусть центром неподвижной системы координат  $OXY$  является точка  $O$ , являющаяся геометрическим центром шарика (центром кривизны сферической наружной поверхности).
- пусть  $OX_1Y_1Z_1$  - подвижная система координат. Ось  $OZ_1$  всегда жестко связана (совпадает) с прямой, проведенной через точки  $O$  и  $C$ . Точка  $C$  - это центр тяжести волчка, который в начальный момент расположен ниже центра кривизны опорной поверхности - точки  $O$ . Ось  $OY_1$  всегда находится в плоскости действия векторов внешних сил - силы тяжести  $G$ , силы инерции  $F$  и силы реакции опоры  $P$ .
- пусть волчок в состоянии покоя находится в устойчивом положении, касаясь опорной поверхности точкой  $A$ . [4]

Задаем волчку циклическую скорость относительно оси  $OZ$ . Ввиду наличия сторонних сил: силы трения о поверхность, силы сопротивления воздуха, возникнет отклонение центра тяжести относительно вертикальной оси  $OZ$ . Смещение точки  $C$  приведет к возникновению центробежной силы  $F$ :

$$F = am = \omega_0^2 mr, \quad (37)$$

где  $r$  - расстояние смещения точки  $C$  относительно  $OZ$ .

Данная сила  $F$  и вес тела  $G$  вместе создадут момент сил:

$$M = Fp - Gr, \quad (38)$$

где

$$M_g = -Gr, \quad (39)$$

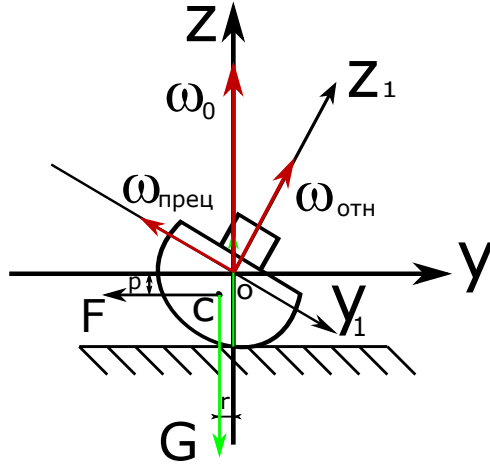


Рис. 9: Волчок Томсона

момент силы тяжести  $G$  относительно оси  $OZ$ ,

$$M_f = Fp, \quad (40)$$

момент центробежной силы  $F$  относительно оси  $OY$

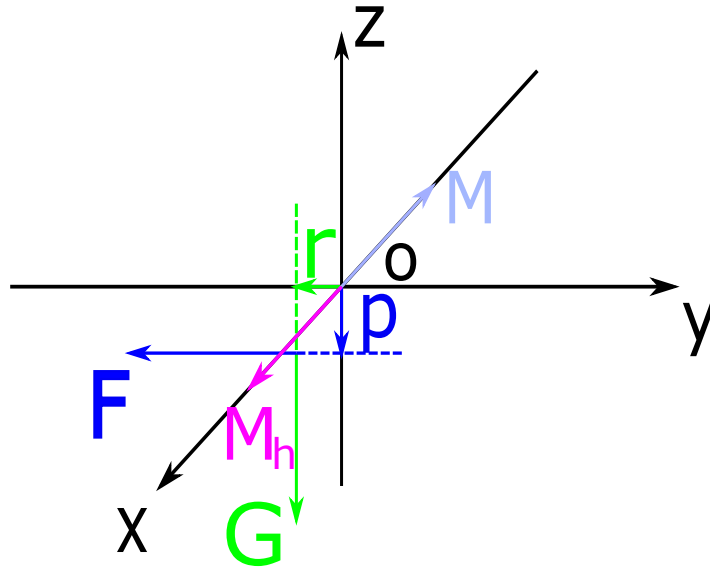


Рис. 10: Волчок Томсона

Возникновение момента сторонних сил вызывает прецессию волчка и создает гироскопический момент  $M_h$ , который старается уравновесить действие момента внешних сил  $M$ . Это означает, что волчок начинает вращение вокруг оси  $OY$ .

$$M_h = L_{отн}\omega_{пер} = mr^2\omega_{отн}\omega_{пер} = M. \quad (41)$$

Тогда скорость прецессии определяется по формуле:

$$\omega_{prec} = M/L_{отн} = mr(\omega_0^2 p - g)/(mr^2\omega_{отн}). \quad (42)$$

Теперь представим себе идеальную модель, когда при запуске волчка отсутствуют какие-либо силы. Тогда волчок будет вращаться с постоянной скоростью  $\omega_0$ , направленной вдоль неподвижной оси  $OZ$ . Тогда справедливо следующее утверждение для кинетических моментов

$$L_0 = \sqrt{L_y^2 + L_z^2} = const, \quad (43)$$

где

$$L_y = I_y \omega_{prec}; \quad (44)$$

$$L_0 = I_0 \omega_0; \quad (45)$$

$$L_z = I_z \omega_{otn}, \quad (46)$$

тогда

$$L_0 = \sqrt{(I_y \omega_{prec})^2 + (I_z \omega_{otn})^2} = const. \quad (47)$$

Из этого утверждения можно сделать следующий вывод: чем сильнее волчок отклоняется от вертикальной неподвижной оси  $OZ$ , тем меньше скорость его собственных вращений и тем больше скорость прецессии. Тогда в момент времени, когда  $OZ$  и  $OZ_1$  взаимно перпендикулярны, собственная скорость вращения равно 0:

$$\omega_0 = \omega_{prec}; \omega_{otn} = 0, \quad (48)$$

то есть, волчок перестает вращаться вокруг своей оси, а скорость прецессии максимальна.

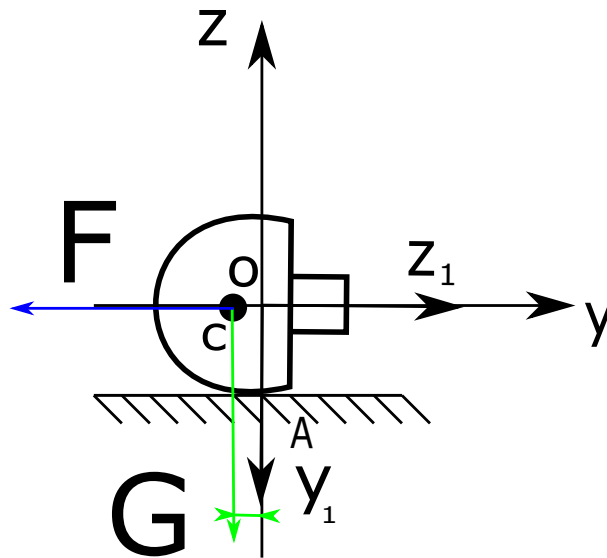


Рис. 11: Волчок Томсона

Далее аналогично начальному вращению, во время прецессии волчок вновь отклонится от оси  $OY$ . Момент вектора  $F$  в текущий момент времени сонаправится с моментом силы тяжести и, соответственно, суммарный момент изменит свое направление на противоположное. По закону сохранения моментов, гироскопический момент так же изменит свое направление. Волчок начнет вращение в сторону, противоположную начальному направлению.

Центр тяжести продолжит движение вверх. И будет подниматься до тех пор, пока точка  $C$  не совместится с точкой на оси  $OZ$ . Как только это произойдет, волчок займет устойчивое положение на ножке и продолжит вращение до тех пор, пока момент импульса  $L_0$  не станет равен 0.

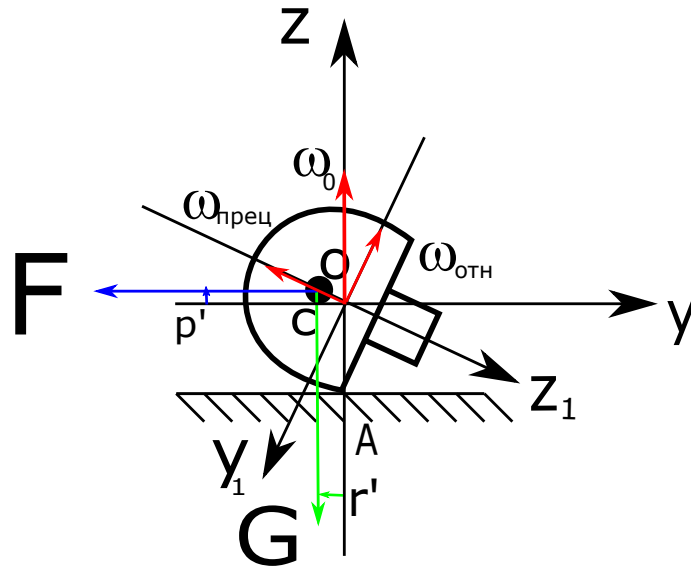


Рис. 12: Волчок Томсона

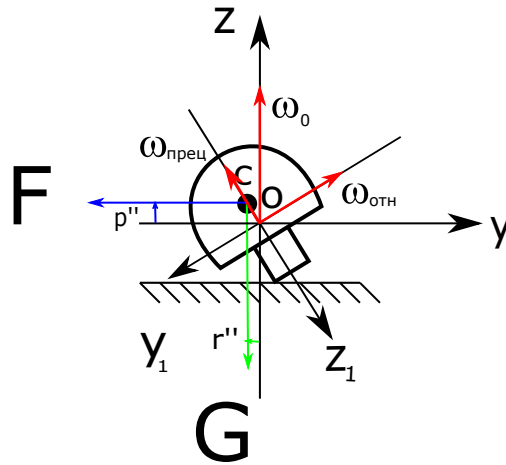


Рис. 13: Волчок Томсона

Направление переворота волчка напрямую зависит от суммарного момента, возникаемого при отклонении центра масс в результате флуктуаций. Рассмотрим подробнее равенство:

$$\vec{M} = m\vec{r}(\omega_0^2\vec{p} + \vec{g}), \quad (49)$$

где  $\vec{M}$  - суммарный момент,  $m\vec{r}\omega_0^2\vec{p}$  - момент центробежной силы, направленный вдоль оси  $OX$  и сонаправленный с этой осью,  $m\vec{r}\vec{g}$  - момент силы тяжести, который, в нашем случае, противоположно направлен относительно момента силы тяжести. Тогда направление движения можно определить, сравнив две величины:  $p\omega^2$  и  $g$ .

Пусть  $h$  расстояние от геометрического центра до центра масс. Тогда  $h\cos\theta = p$ . Ввиду малости угла  $\theta$  принимаем  $\cos\theta = 1$ . Тогда сравним  $h\omega^2$  и  $g$ . Если  $g > h\omega$ , то суммарный момент сонаправлен с осью  $OX$  и волчок будет стремиться вернуться в начальное положение. Если же  $g < h\omega$ , то волчок будет переворачиваться в сторону начального отклонения от положения устойчивого равновесия.

## 0.7 Лагранжиан для Волчка Томсона.

Рассмотрим с физической точки зрения волчок Томсона. Для начала определим его лагранжиан, а далее, с помощью формул найдем Гамильтониан нашей системы. Введем функцию  $f(\theta)$ ,

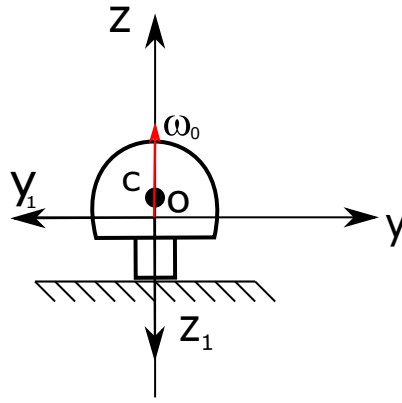


Рис. 14: Волчок Томсона

характеризующую расстояние от центра тяжести волчка до плоскости  $OXY$  - неподвижной. Согласно второму закону Ньютона:

$ma = N - mg$ ; где  $a = \ddot{f}$ ,  $m = 1$  (для простоты) тогда  $m\ddot{f} = N - mg$ , откуда  $N = g + \ddot{f}$  Тогда  $N = g + \ddot{f}(\theta)\dot{\theta}^2 + \dot{f}(\theta)\ddot{\theta}$ . Пусть  $A - C$  - . Тогда составим Лагранжиан:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (A + f'^2)(\dot{\theta})^2 + A(\dot{\psi})^2 \sin^2 \theta + C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2) - gf. \quad (50)$$

Теперь, зная функцию Лагранжа, составим следующие уравнения:

$$\dot{x} = p_x; \dot{y} = p_y; C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = p_2; A(\dot{\psi})^2 \sin^2 \theta + C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta = p_1. \quad (51)$$

Возьмем для удобства  $p_x = p_y = 0$ . Тогда Гамильтониан системы выглядит следующим образом:

$$H = \frac{1}{2}(A + f'^2)\dot{\theta}^2 + gf + \frac{p_2^2}{2C} + \frac{(p_1 - p_2 \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta}. \quad (52)$$

## 0.8 Заключение

В данной работе на основе материалов, имеющих в открытом доступе, была изучена физика вращающегося волчка. Получены кинематические и динамические уравнения Эйлера, были получены выражения для гамильтонианов обычного волчка и волчка Томсона.

# Литература

- [1] Сферическое движение и способы его задания  
<https://isopromat.ru/teormeh/kratkaja-teoria/sfericeskoe-dvizenie-i-sposoby-ego-zadania>
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том1. Механика 1965
- [3] Д. В. Сивухин. Общий курс физики. Механика, 1979
- [4] Китайский волчок: теория переворота  
<http://al-vo.ru/mekhanika/kitajskij-volchok-teoriya-perevorota.html>
- [5] Почему не падает вращающийся волчок  
<http://al-vo.ru/mekhanika/pochemu-ne-padaet-krutyashhij-sya-volchok.html>