

# Изучение колебаний связанных маятников

Антон Лачихин

5 января 2019 г.

- **Постановка задачи:**

Многие сложные физические явления, такие, как взаимодействия атомов или молекул друг с другом, взаимодействие света с веществом, распространение световых и звуковых волн в среде в некотором приближении могут быть описаны с помощью модели связанных осцилляторов. Данный факт говорит о безусловной важности этой модели, а также о необходимости ее изучения. В следствии этого, целью данной работы является изучение модели, состоящей из двух связанных маятников. В ходе работы будет изучено поведение рассматриваемой системы и ее характеристики.;

- **Описание системы.**

Система представляет из себя два маятника – два тонких невесомых нерастяжимых стержня одинаковой длины  $l_1$ , к концам которых прикреплены грузы одинаковой массы  $m$ . Стержни закреплены к неподвижному подвесу. Маятники связаны между собой пружиной с заданной жесткостью  $k$  (рис.1).

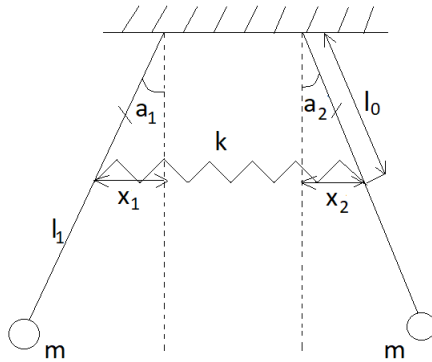


Рис. 1: Система из двух связанных маятников.

Здесь  $\alpha_1, \alpha_2$ — углы отклонения первого и второго маятников от вертикали,  $x_1, x_2$ — деформации пружины, обусловленные отклонениями первого и второго маятников,  $l_0$ — расстояние от точки крепления маятника до точки крепления пружины - одинаково для обоих маятников. На оба маятника со стороны пружины действует одинаковая по величине сила связи, обусловленная разностью сил упругости, возникающих при деформациях  $x_1, x_2$ . По величине эта сила равна:

$$F_{св} = k(x_2 - x_1). \quad (1)$$

Действие силы связи изображено на рисунке 2:

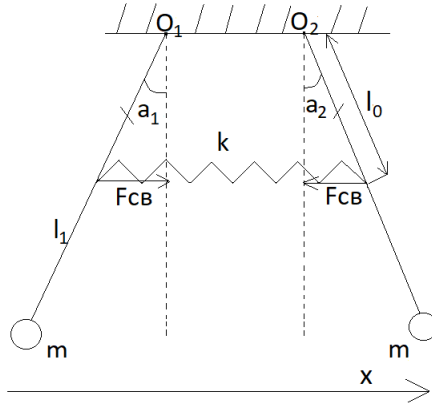


Рис. 2: Система из двух связанных маятников с учетом сил.

Напишем уравнения проекций моментов для 1-го и 2-го маятников относительно точек  $O_1$  и  $O_2$  соответственно:

$$ml_1^2 \ddot{\alpha}_1 = -mgl_1 \sin \alpha_1 - M_{F_{св1}}, \quad (2)$$

$$ml_1^2 \ddot{\alpha}_2 = -mgl_1 \sin \alpha_2 + M_{F_{св2}}, \quad (3)$$

где  $M_{F_{св1}}, M_{F_{св2}}$  — проекции моментов силы связи для каждого из маятников.

Определим их. Проекция момента силы связи для 1-го маятника:

$$M_{F_{св1}} = F_{св} l_0 \cos \alpha_1 = k(x_2 - x_1) l_0 \cos \alpha_1; \quad (4)$$

для 2-го маятника:

$$M_{F_{св2}} = F_{св} l_0 \cos \alpha_2 = k(x_2 - x_1) l_0 \cos \alpha_2; \quad (5)$$

Подставляя полученные выражения в (2) и (3), имеем:

$$ml_1^2 \ddot{\alpha}_1 = -mgl_1 \sin \alpha_1 - k(x_2 - x_1) l_0 \cos \alpha_1, \quad (6)$$

$$ml_1^2 \ddot{\alpha}_2 = -mgl_1 \sin \alpha_2 + k(x_2 - x_1) l_0 \cos \alpha_2. \quad (7)$$

Деформации  $x_1, x_2$  выразим через известные величины:

$$x_1 = l_0 \sin \alpha_1, \quad (8)$$

$$x_2 = l_0 \sin \alpha_2. \quad (9)$$

Будем рассматривать малые углы отклонения 1-го и 2-го маятников, тогда  $\sin x \approx x, \cos x \approx 1$ . С учетом (8) и (9) и вышеупомянутых упрощений выражения (6) и (7) примут вид:

$$ml_1^2 \ddot{\alpha}_1 = -mgl_1 \alpha_1 - k(\alpha_2 - \alpha_1) l_0^2, \quad (10)$$

$$ml_1^2 \ddot{\alpha}_2 = -mgl_1 \alpha_2 + k(\alpha_2 - \alpha_1) l_0^2. \quad (11)$$

В обоих уравнениях перенесем все слагаемые в левую часть и разделим уравнения на  $ml_1^2$ :

$$\ddot{\alpha}_1 + \omega_0^2 \alpha_1 + \lambda(\alpha_2 - \alpha_1) = 0, \quad (12)$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \omega_0^2 \alpha_2 - \lambda(\alpha_2 - \alpha_1) = 0, \quad (13)$$

здесь

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_1}}, \lambda = \frac{k}{m} \left( \frac{l_0}{l_1} \right)^2. \quad (14)$$

Для решения данной системы введем новые переменные, характеризующие данную систему как целое:

$$x(t) = \frac{1}{2}(\alpha_1(t) - \alpha_2(t)), \quad (15)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(\alpha_1(t) + \alpha_2(t)). \quad (16)$$

Складывая (12) и (13), получаем:

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y \quad (17)$$

Решение уравнения (17) имеет вид:

$$y(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t, \quad (18)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные константы.

Вычитая (13) из (12), получаем:

$$\ddot{x} = -(\omega_0^2 - 2\lambda)x \quad (19)$$

Решение выглядит так:

$$x(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t, \quad (20)$$

где  $C$  и  $D$  — произвольные константы, а

$$\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - 2\lambda)}. \quad (21)$$

Рассмотрим 2 случая начальных условий. Первый - в начальный момент оба маятника отклонены на одинаковый угол:  $\alpha_1(0) = \alpha$ ,  $\alpha_2(0) = \alpha$ ,  $\dot{\alpha}_1(0) = 0$ ,  $\dot{\alpha}_2(0) = 0$ . При данных начальных условиях маятники будут колебаться синфазно, при этом пружина будет находиться в недеформированном состоянии. Данное движение является собственной модой изучаемой системы (рис. 3).

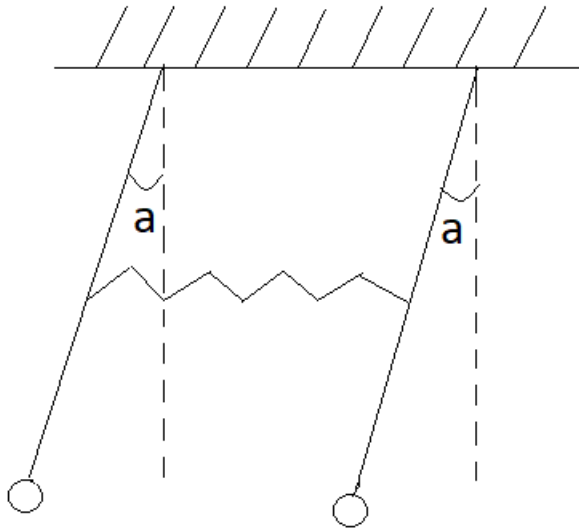


Рис. 3: Первая собственная мода системы.

Учитывая данные начальные условия, получим

$$y(t) = \alpha \cos \omega_0 t, \quad (22)$$

$$x(t) = 0. \quad (23)$$

Из определения переменной  $y$ , находим, что

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{2} \alpha \cos \omega_0 t, \quad (24)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{2} \alpha \cos \omega_0 t. \quad (25)$$

Анализируя полученные выражения, находим, что  $\omega_0$  - собственная частота системы, отвечающая первой моде.

Рассмотрим второй случай: в начальный момент маятники отклонены на равные по модулю, но разные по направлению углы ( $\alpha_1(0) = \alpha$ ,  $\alpha_2(0) = -\alpha$ ,  $\dot{\alpha}_1(0) = 0$ ,  $\dot{\alpha}_2(0) = 0$ ). При данных начальных условиях маятники будут колебаться в противофазе. Данное движение так же будет являться собственной модой системы (рис. 4).

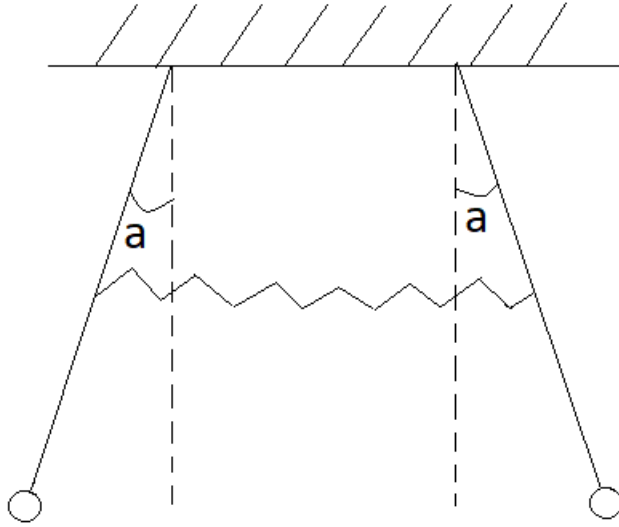


Рис. 4: Вторая собственная мода системы.

Учитывая начальные условия, получим

$$x(t) = \alpha \cos \omega t, \quad (26)$$

$$y(t) = 0. \quad (27)$$

Из определения переменной  $x$ , находим, что

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{2} \alpha \cos \omega t, \quad (28)$$

$$\alpha_2(t) = -\frac{1}{2} \alpha \cos \omega t. \quad (29)$$

Анализируя полученные выражения, находим, что  $\omega$  является собственной частотой системы, отвечающей второй моде.

Любое колебательное движение системы с произвольными начальными условиями можно представить как суперпозицию мод данной системы. С учетом найденных мод определим зависимости углов отклонения 1го и 2го маятников от времени при их произвольном движении:

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{2} \alpha (\cos \omega_0 t + \cos \omega t), \quad (30)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{2} \alpha (\cos \omega_0 t - \cos \omega t). \quad (31)$$

Так же представляет интерес эффект передачи энергии от одного маятника к другому. В начальный момент мы отклоняем один маятник на некоторый угол, оставляя второй

неподвижным, и отпускаем его. Через некоторый промежуток времени второй маятник должен отклониться на равный по модулю, но противоположный по направлению угол, а первый должен находиться в точке равновесия с нулевой скоростью. То есть, энергия от первого маятника за счет связи должна перейти ко второму маятнику (рис. 5).

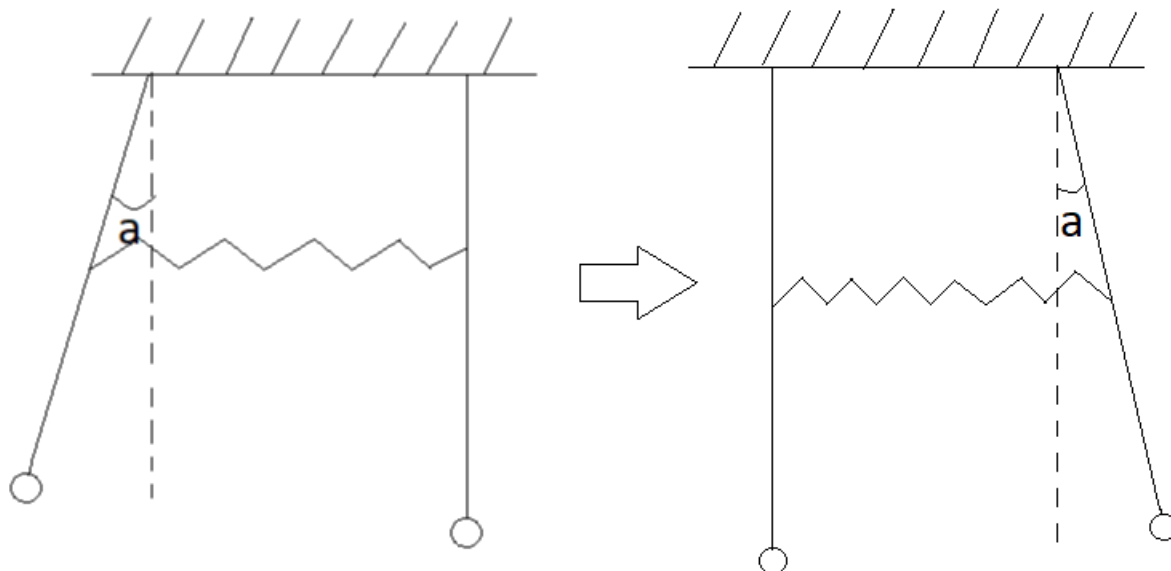


Рис. 5: Перекачка энергии.

Фазовые портреты 1го и 2го маятника, построенные с помощью пакета WolframMathematica хорошо иллюстрируют данный эффект (рис. 6).

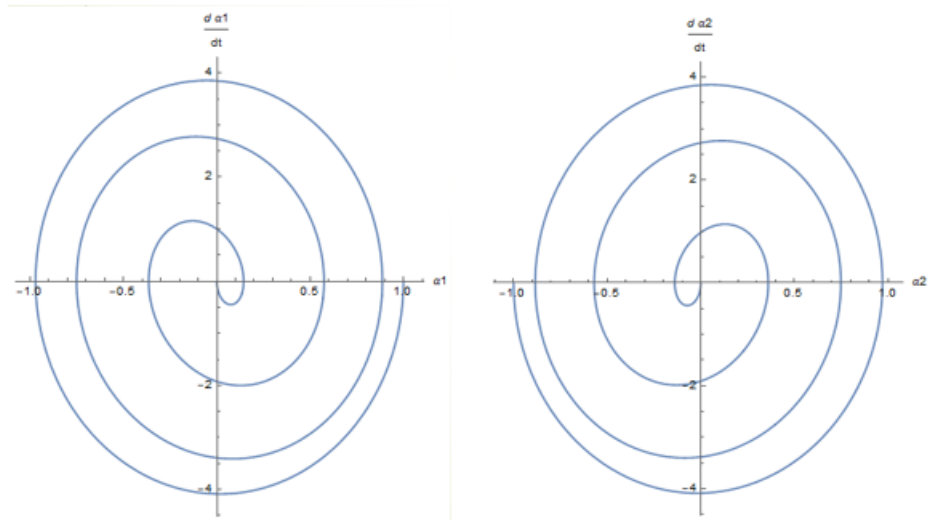


Рис. 6: Фазовые портреты 1го (левый) и 2го (правый) маятников.

Таким образом, в данной работе были найдены собственные частоты системы, определены зависимости углов отклонения маятников от времени при произвольных начальных условиях, а также был рассмотрен эффект передачи энергии от одного маятника к другому.