

Казанский (Приволжский) федеральный университет

А.А. Калачёв

СПОНТАННОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ  
РАССЕЯНИЕ  
И ЗАДАЧИ КВАНТОВОЙ ИНФОРМАТИКИ

Учебно-методическое пособие

Казанский университет

2012

УДК 530.145 (21):002(075.9)  
ББК 22.12 22.134:32.81Я73  
К17

Печатается по рекомендации Учебно-методического Совета  
Института физики К(П)ФУ

Рецензент — докт. физ.-мат. наук Р.Н. Шахмуратов

**Калачев А.А.**

К17 Спонтанное параметрическое рассеяние и задачи квантовой информатики: учеб.-метод. пос. / А.А. Калачев. — Казань: Казан. ун-т, 2012. — 45 с.: ил.

Учебно-методическое пособие является введением в теорию спонтанного параметрического рассеяния, ориентированным на вопросы, связанные с использованием этого явления в современной квантовой оптике и квантовой информатике. Основное внимание уделяется задачам генерации однофотонных и перепутанных двухфотонных состояний.

Пособие является дополнением к материалу лекций, читаемых автором в рамках спецкурса «Квантовая оптика» магистрантам Казанского (Приволжского) федерального университета, обучающихся по направлению «Физика».

**УДК 530.145 (21):002(075.9)**  
**ББК 22.12 22.134:32.81Я73**

© Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012  
© Калачев А.А., 2012

# Глава 1

## Спонтанное параметрическое рассеяние

### 1.1. Общие определения

Параметрическое рассеяние света (ПР) — процесс взаимодействия трёх мод электромагнитного поля в квадратично нелинейной среде, при котором уничтожение фотона в одной моде (мода накачки) сопровождается рождением двух фотонов в оставшихся модах (называемых, обычно, сигнальной и холостой). Другими словами, в процессе ПР происходит перекачка энергии из поля накачки в сигнальное и холостое поля, составляющие вместе поле рассеянного света. Исходя из соображений наглядности можно сказать, что в элементарном акте ПР происходит «распад» фотона поля накачки на два фотона рассеянного поля. Однако термин «распад» не следует понимать в буквальном смысле, поскольку фотон является элементарным возбуждением моды электромагнитного поля и его невозможно разделить на части с меньшей энергией. Термин «параметрический» означает, что в результате взаимодействия не происходит обмена энергией между полем и средой: среда остаётся в исходном состоянии, а энергия, которую теряет поле накачки, совпадает с энергией, которую приобретает поле рассеяния. Другими словами, нелинейная среда является прозрачной и описывается действительным тензором квадратичной восприимчивости. В противном случае, когда частота одной из мод поля рассеяния близка к резонансным частотам нелинейной среды и нужно учитывать поглощение, ПР превращается в рассеяние на поляритонах или на оптических фононах.

Далее нас будет интересовать частный случай ПР — спонтанное параметрическое рассеяние (СПР), когда моды сигнального и холостого полей находятся изначально в вакуумном состоянии. СПР можно интерпретировать как процесс параметрического усиления вакуумных флуктуаций сигнального и холостого полей, т.е. шумы параметрического усилителя [1], в ходе которого в модах рассеянного поля появляются пары коррелированных фотонов, часто называемых бифотонами [2]. Однако следует отметить, что, как и в случае спонтанно-

го излучения атомов, вакуумные флуктуации поля не являются сами по себе запускающим механизмом процесса рассеяния. Пары фотонов рождаются в результате параметрического взаимодействия трёх мод электромагнитного поля, две из которых находятся в вакуумном состоянии. С другой стороны, параметрическое усиление оказывается фазово-чувствительным: если фаза суммарной флуктуации сигнального и холостого полей совпадает с фазой поля накачки, то такая флуктуация усиливается. Если же фазы противоположны, то флуктуация ослабляется. Поэтому поле рассеянного света представляет собой квадратурно-сжатый свет (сжатый вакуум), у которого дисперсия одной из квадратурных компонент поля меньше своего значения в вакуумном состоянии.

Квантово-механическое описание СПР начинается с введения эффективного гамильтониана параметрического взаимодействия мод электромагнитного поля в нелинейной среде. В простейшем случае, имеем три моды, так что

$$H = \hbar(\kappa a_p a_i^\dagger a_s^\dagger + \kappa^* a_p^\dagger a_i a_s), \quad (1.1)$$

где  $\kappa$  — константа взаимодействия (далее будем считать её действительной величиной), пропорциональная квадратичной восприимчивости среды,  $p$ ,  $s$  и  $i$  — индексы, обозначающие моду накачки, сигнальной волны и холостой волны, соответственно. Начальное состояние поля естественно записать в виде:

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = |\alpha_p\rangle|0_i\rangle|0_s\rangle \equiv |\alpha_p\rangle|0\rangle, \quad (1.2)$$

где  $|\alpha\rangle$  — обозначает когерентное состояния с комплексной амплитудой  $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$  и  $|0\rangle$  — обозначает вакуумное состояние. Тогда эволюция поля в процессе параметрического взаимодействия приводит к следующему состоянию:

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\psi_{\text{in}}\rangle = |\alpha_p\rangle |\psi\rangle, \quad (1.3)$$

где

$$|\psi\rangle = \sum_n \frac{[-i e^{i\theta} \text{th } r]^n}{\text{ch } r} |n_i\rangle |n_s\rangle \quad (1.4)$$

— вектор состояния поля СПР. Здесь  $r = \kappa|\alpha|t$  — параметр накачки,  $|n\rangle$  — фоковское состояние с числом фотонов  $n$ . Таким образом, поле СПР представляет собой когерентную суперпозицию коррелированных по числу фотонов фоковских состояний двух мод (двухмодовый сжатый вакуум). Для упрощения обозначений положим  $\theta = \pi/2$ , так что

$$|\psi\rangle = \sqrt{1 - \lambda^2} \sum_n \lambda^n |n_i\rangle |n_s\rangle, \quad \lambda = \text{th } r. \quad (1.5)$$

Далее будем рассматривать случай, когда поле накачки является слабым ( $r \ll 1$ ) и в состоянии (1.5) можно учитывать лишь низшие члены по теории возмущения. Тогда

$$|\psi\rangle \approx |0\rangle + r|1_i\rangle|1_s\rangle, \quad (1.6)$$

так что в первом приближении поле СПР представляет собой поток бифотонов (бифотонное поле). В общем случае, конечно, СПР затрагивает множество мод, и вектор состояния бифотонного поля принимает вид [3]:

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \sum_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s} F_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s} |1_{\mathbf{k}_i}\rangle |1_{\mathbf{k}_s}\rangle. \quad (1.7)$$

Здесь индексы  $\mathbf{k}_i$  и  $\mathbf{k}_s$  соответствуют, например, волновым векторам плоских бегущих волн, являющихся модами поля конечного объёма с периодическими граничными условиями. Величина  $F_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s}$  называется амплитудой бифотона. Следует отметить, что понятие моды не сводится к плоским монохроматическим волнам в свободном пространстве или модам резонатора. В более широком смысле можно говорить о пространственно-временных модах, представляющих собой суперпозиции плоских волн или волновые пакеты. В частности, для бифотонного поля всегда можно найти такие пространственно-временные моды, что разложение (1.7) принимает вид разложения Шмидта:

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \sum_m \sqrt{\lambda_m} |1_{m_i}\rangle |1_{m_s}\rangle. \quad (1.8)$$

Здесь  $m$  — абстрактный индекс моды, а величина  $\lambda_m$  задаёт вероятность генерации бифотона в соответствующую пару мод. Если в разложении Шмидта присутствует больше одного слагаемого, то состояние бифотонного поля нельзя представить в виде произведения однофотонных состояний сигнальной и холостой моды. В этом случае состояние поля называется перепутанным. В противном случае (одно слагаемое в разложении Шмидта), состояние поля называется факторизованным. Рассмотренная выше простейшая модель, приводящая к формуле (1.6), как раз и соответствует факторизованному состоянию двух мод бифотонного поля.

Поскольку параметрическое взаимодействие световых волн в нелинейных средах является, как правило, слабым эффектом, то высокая вероятность СПР достигается лишь при достаточно большом времени взаимодействия (существенно больше периода световых колебаний) и при достаточно больших размерах области взаимодействия (существенно больше длины волны излучения). При этом амплитуды вероятности «распада» фотона накачки в различных точках пространства-времени будут складываться конструктивно лишь при наличии когерентности

между взаимодействующими модами во времени и в пространстве. Это приводит к появлению условий фазового синхронизма:

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i. \quad (1.10)$$

Здесь  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  — частота и волновой вектор моды в нелинейной среде ( $k = \omega n(\omega)/c$ , где  $n(\omega)$  — показатель преломления, зависящий от направления волнового вектора и поляризации моды,  $c$  — скорость света в вакууме). Первое условие (частотный синхронизм) соответствует фазовому синхронизму во времени и интерпретируется, обычно, как закон сохранения энергии. Второе условие (пространственный синхронизм) соответствует фазовому синхронизму в пространстве и часто называется законом сохранения импульса. Ясно, что в первом случае пренебрегается каким-либо обменом энергией между полем и средой, а во втором — обменом импульсом (эффектами отдачи). Каждое из записанных условий накладывает ограничение только на сумму частот и волновых векторов мод поля рассеяния, допуская широкий спектр и диаграмму направленности поля СПР. Однако наличие дисперсии света в нелинейных средах приводит к тому, что совместное выполнение условий фазового синхронизма возможно лишь при определённом сочетании частот и волновых векторов. В результате, появляется зависимость частоты рассеяния от угла, которая называется частотно-угловым спектром СПР и является одной из его важнейших характеристик. Кроме того, поскольку дисперсия как правило является нормальной, т.е. показатель преломления возрастает с частотой, возникает необходимость в укорочении волнового вектора накачки. Стандартным решением здесь является использование анизотропных нелинейных кристаллов, в которых показатель преломления зависит от направления распространения световой волны (см., например, [4]). Так, в случае отрицательного одноосного кристалла показатель преломления необыкновенной волны уменьшается при увеличении угла между оптической осью и волновым вектором, поэтому при определённой ориентации оптической оси к пучку накачки достигается выполнение обоих условий фазового синхронизма. При этом поляризация фотонов в коррелированных парах может быть одинаковой (синхронизм типа I) или разной (синхронизм типа II). Процесс СПР называется вырожденным, если  $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2$ , и коллинеарным, если  $\mathbf{k}_s \parallel \mathbf{k}_i \parallel \mathbf{k}_p$ . Более широкие возможности предоставляют кристаллы с периодической пространственной модуляцией нелинейности (периодической доменной структурой). В этом случае, вместо (1.10) будем иметь условие квазисинхронизма вида:

$$k_p = k_s + k_i + \frac{2\pi}{\Lambda}, \quad (1.11)$$

где  $\Lambda$  — пространственный период модуляции. Подбирая последний,

можно выполнить условия фазового синхронизма при распространении волн вдоль оптической оси, что позволяет избежать двулучепреломления и увеличить длину взаимодействия.

Таким образом, отличительными особенностями СПР являются широкий непрерывный спектр излучения, который не связан непосредственно со структурой энергетических уровней нелинейной среды, и наличие двухфотонных корреляций. Именно последние делают СПР одним из наиболее востребованных явлений в экспериментальной квантовой оптике [5]. Корреляции по числу фотонов между сигнальными и холостым полями лежат в основе методов квантовой метрологии (абсолютной калибровки фотодетекторов) и условного приготовления однофотонных состояний. Различные виды перепутанных двухфотонных состояний, которые можно создавать в процессе СПР, используются при проведении экспериментов по основам квантовой механики (проверка неравенств Белла), квантовой криптографии и оптических квантовых вычислений. Что касается широкого спектра, то он позволяет создавать перестраиваемые по частоте источники двухфотонных и других неклассических состояний, что чрезвычайно удобно при исследовании взаимодействия квантовых состояний света с резонансными атомными системами и бифотонной спектроскопии.

Явление СПР было предсказано Д.Н. Клышко в 1966 году [6] и через год наблюдалось экспериментально сразу в трёх лабораториях [7–9]. Наличие корреляций чисел фотонов у сигнального и холостого полей было также сначала предсказано теоретически в работе Д.Н. Клышко и Я.Б. Зельдовича [10], а экспериментально наблюдалось чуть позже в работе Бернхема и Вейнберга [11].

## 1.2. Вектор состояния бифотонного поля. I.

Рассматривая спонтанное параметрическое рассеяние можно сразу предположить, что поле накачки находится в когерентном состоянии со средним числом фотонов намного больше единицы, так что это поле можно рассматривать классически. Кроме того, сделаем следующие упрощающие расчёт предположения: 1) нелинейная среда представляет собой бесконечно широкий слой толщиной  $L$ , а поле накачки — плоская волна, распространяющаяся перпендикулярно поверхности слоя; 2) нелинейная среда является однородной, т.е. показатель преломления и нелинейная восприимчивость не зависят от пространственных координат; 3) поле СПР рассматривается в пределах небольшого телесного угла, так что эффективное значение нелинейной восприимчивости является одинаковым для всех мод поля рассеяния. Тогда гамильтониан

взаимодействия можно записать в следующем виде:

$$H = \varepsilon_0 \chi^{(2)} \int d^3 \mathbf{r} E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}_i^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}_s^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \text{э.с.}, \quad (1.12)$$

где  $E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_0 \exp(i(\mathbf{k}_p \mathbf{r} - \omega_p t))$  — поле классической волны накачки,

$$\hat{E}_q^{(-)}(\mathbf{r}, t) = -i \int d^3 \mathbf{k} E_q(\mathbf{k}) a_q^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega_q(\mathbf{k}) t)}, \quad q = i, s \quad (1.13)$$

— операторы поля, соответствующие модам рассеянного света,

$$E_q(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} n_q(\mathbf{k})} \sqrt{\frac{\hbar \omega_q(\mathbf{k})}{2\varepsilon_0}}, \quad |\mathbf{k}| = \frac{\omega_q(\mathbf{k}) n_q(\mathbf{k})}{c}, \quad (1.14)$$

$n_q(\mathbf{k})$  — показатель преломления среды для волны, имеющей волновой вектор  $\mathbf{k}$  и поляризацию, задаваемую индексом  $q$ ,  $\omega_q(\mathbf{k})$  — соответствующая этой волне частота,  $c$  — скорость света в вакууме. Формула для амплитуды  $E_q(\mathbf{k})$  записана в приближении равенства фазовой и групповой скорости света в среде [12], что сделано для простоты. Такое приближение, естественно, нельзя сделать в фазовых множителях  $\exp(-i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega_q(\mathbf{k}) t))$ .

С учетом (1.13) гамильтониан (1.12) принимает вид

$$H = -\varepsilon_0 \chi^{(2)} \iint d^3 \mathbf{k}_i d^3 \mathbf{k}_s E_0 E_i(\mathbf{k}_i) E_s(\mathbf{k}_s) a_i^\dagger(\mathbf{k}_i) a_s^\dagger(\mathbf{k}_s) \times \\ \int d^3 \mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \mathbf{r}} e^{i(-\omega_p + \omega_i(\mathbf{k}_i) + \omega_s(\mathbf{k}_s)) t} + \text{э.с.}, \quad (1.15)$$

и в первом порядке теории возмущения получаем следующий вектор состояния поля:

$$|\psi\rangle = |0\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt H |0\rangle = \\ = |0\rangle + \iint d^3 \mathbf{k}_i d^3 \mathbf{k}_s F(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) a_i^\dagger(\mathbf{k}_i) a_s^\dagger(\mathbf{k}_s) |0\rangle, \quad (1.16)$$

где

$$F(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = \frac{i\varepsilon_0 \chi^{(2)}}{\hbar} E_0 E_i(\mathbf{k}_i) E_s(\mathbf{k}_s) V \times \\ \times \Delta(\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) 2\pi \delta(\omega_i(\mathbf{k}_i) + \omega_s(\mathbf{k}_s) - \omega_p), \quad (1.17)$$

$\Delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{V} \int_V d^3 \mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \mathbf{r}}$  и  $V$  — объём среды.

Направим ось  $z$  системы координат вдоль волнового вектора волны накачки  $\mathbf{k}_p$  и обозначим через  $\mathbf{k}_z$  и  $\mathbf{k}_\perp$  продольную и поперечную



составляющие волнового вектора  $\mathbf{k}$ , соответственно. Начало системы отсчета  $z = 0$  поместим на выходной плоскости нелинейной среды, так что  $z \in [-L, 0]$ . В пределе бесконечно широкой нелинейной среды имеем:

$$V \Delta(\mathbf{k}) = \int_V d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = L h(k_z L) (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k}_\perp), \quad (1.18)$$

где

$$h(x) = (1 - e^{-ix})/(ix) = \exp(-ix/2) \operatorname{sinc}(x/2), \quad (1.19)$$

$\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$ . Таким образом, с учетом (1.18), формула (1.17) содержит две дельта-функции, одна из которых накладывает ограничение на частоты  $\omega_p = \omega_i(\mathbf{k}_i) + \omega_s(\mathbf{k}_s)$  (частотная корреляция), а другая — на поперечные компоненты волновых векторов  $\mathbf{k}_{i\perp} + \mathbf{k}_{s\perp} = 0$  (угловая корреляция). В результате, вектор состояния принимает вид

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \int d^2\mathbf{k}_\perp \int d\omega F(\omega, \mathbf{k}_\perp) a_i^\dagger(\omega, \mathbf{k}_\perp) a_s^\dagger(\omega_p - \omega, -\mathbf{k}_\perp) |0\rangle, \quad (1.20)$$

где

$$F(\omega, \mathbf{k}_\perp) = \frac{i\varepsilon_0 \chi^{(2)} (2\pi)^3 L E_0}{\hbar c} E_i(\omega) E_s(\omega_p - \omega) \sqrt{n_i(\omega) n_s(\omega_p - \omega)} h(\Delta k_z L), \quad (1.21)$$

$\Delta k_z = k_{pz} - k_{iz}(\omega) - k_{sz}(\omega_p - \omega)$  — расстройка волновых векторов вдоль оси  $z$  ( $k_z = \sqrt{k^2 - k_\perp^2}$ ). При переходе от интегрирования по волновому вектору к интегрированию по частоте использованы следующие соотношения:  $dk = (n/c) d\omega$  и  $a(k) = \sqrt{n/c} a(\omega)$ .

Исходя из расчёта, видно, что протяжённый характер взаимодействия во времени (непрерывная накачка) и в пространстве (бесконечный поперечный размер области взаимодействия) приводят к наличию частотных и угловых корреляций, соответственно, между сигнальным и холостым полями. Другими словами, в процессе СПР рождаются пары фотонов, обладающих (анти) корреляцией по частоте и направлению испускания. При этом взаимосвязь частоты и направления испускаемых фотонов определяется условиями пространственного синхронизма, которые задаются функцией  $h(x)$ .

### 1.3. Частотно-угловой спектр

Зависимость вероятности СПР от частоты и направления испускаемых фотонов называется частотно-угловым спектром СПР и является его важнейшей характеристикой. Вероятность испускания фотонов в моды рассеянного поля пропорциональна среднему числу фотонов в этих модах, равному

$$N_q(\omega, \mathbf{k}_\perp) = \langle \psi | a_q^\dagger(\omega, \mathbf{k}_\perp) a_q(\omega, \mathbf{k}_\perp) | \psi \rangle. \quad (1.22)$$

Подставляя в эту формулу состояние (1.20), получаем

$$N_q(\omega, \mathbf{k}_\perp) = \left( \frac{\chi^{(2)} L E_0}{4c} \right)^2 \frac{\omega}{n_i(\omega)} \frac{\omega_p - \omega}{n_s(\omega_p - \omega)} \text{sinc}^2(\Delta k_z L / 2). \quad (1.23)$$

Таким образом, частотно-угловой спектр СПР определяется в общем случае дисперсионными свойствами нелинейной среды (функции  $\text{sinc}(\Delta k(\omega)L)$  и  $n_q(\omega)$ ) и частотной зависимостью амплитуды вакуумных флуктуаций поля  $E_q^2(\omega) \sim \omega$ . Однако частотная дисперсия в типичных нелинейных кристаллах такова, что функция  $\text{sinc}(\omega)$  оказывается дельта-образной по сравнению с остальными зависящими от частоты множителями в формуле (1.23). Это означает, что в пределах небольшого телесного угла ширина спектра СПР получается намного меньше несущей частоты излучения, так что множители  $\omega/n(\omega)$  можно считать постоянными величинами, равными  $\omega_{0q}/n_q(\omega_{0q})$ , где  $\omega_{0q}$  — центральная частота поля  $q$ , соответствующая максимальной интенсивности излучения. Значение  $\omega_{0q}$  определяется исходя из условия, что для данного направления испускания фотонов достигается максимальное значение функции  $\text{sinc}(\Delta k_z L)$ , что означает выполнение условия фазового (волнового) синхронизма.

На рис. 1.1 и 1.2 приведены примеры частотно-углового спектра СПР, вычисленные по формуле (1.23) для кристалла ВВО (без учёта преломления света на выходе из кристалла). Поскольку бета-борат бария является отрицательным одноосным кристаллом, для достижения фазового синхронизма нужно, чтобы волна накачки была необыкновенной, а оптическая ось кристалла была ориентирована под некоторым углом  $\Psi$  к направлению распространения излучения накачки (ось  $z$ ). На рисунках приведены частотно-угловые спектры, которые получаются в плоскости, проходящей через волновой вектор накачки и оптическую ось кристалла. Эффективное значение показателя преломления для необыкновенной волны вычисляется по формуле:

$$n_{\text{eff}}(\lambda, \phi) = \left[ \frac{\cos^2 \phi}{n_o^2(\lambda)} + \frac{\sin^2 \phi}{n_e^2(\lambda)} \right]^{-1/2}, \quad (1.24)$$

где  $\phi$  — угол между волновым вектором необыкновенной волны и оптической осью кристалла,  $n_o(\lambda)$  и  $n_e(\lambda)$  — показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны, зависимость которых от длины волны (и от температуры) определяется формулами Сельмейера [13]. Здесь через  $\lambda$  обозначается длина волны излучения в вакууме. Если обозначить через  $\theta$  угол между волновым вектором поля и осью  $z$ , тогда, очевидно,  $\Psi = \phi + \theta$ . В случае СПР типа II расстройка волновых векторов вдоль оси  $z$  имеет вид:

$$\Delta k_z = \frac{2\pi n_{\text{eff}}(\lambda_p, \Psi)}{\lambda_p} - \frac{2\pi n_o(\lambda_s)}{\lambda_s} \cos(\theta_s) - \frac{2\pi n_o(\lambda_i)}{\lambda_i} \cos(\theta_i), \quad (1.25)$$

где вследствие частотной корреляции  $\lambda_i = \lambda_s \lambda_p (\lambda_s - \lambda_p)$  и вследствие угловой корреляции

$$\sin \theta_i = (\lambda_i / \lambda_s) (n_o(\lambda_s) / n_o(\lambda_i)) \sin \theta_s.$$

В случае СПР типа II, считая холостую волну необыкновенной, имеем

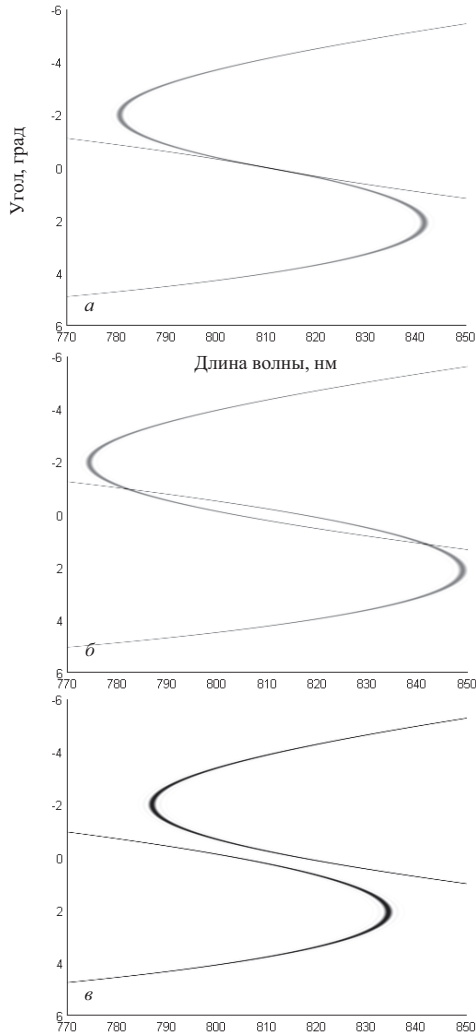
$$\Delta k_z = \frac{2\pi n_{\text{эфф}}(\lambda_p, \Psi)}{\lambda_p} - \frac{2\pi n_o(\lambda_s)}{\lambda_s} \cos(\theta_s) - \frac{2\pi n_{\text{эфф}}(\lambda_i, \phi_i)}{\lambda_i} \cos(\theta_i), \quad (1.26)$$

где частотная корреляция приводит к тому же соотношению между длинами волн, а угловая корреляция даёт

$$\sin \theta_i = (\lambda_i / \lambda_s) (n_o(\lambda_s) / n_{\text{эфф}}(\lambda_i, \phi_i)) \sin \theta_s.$$

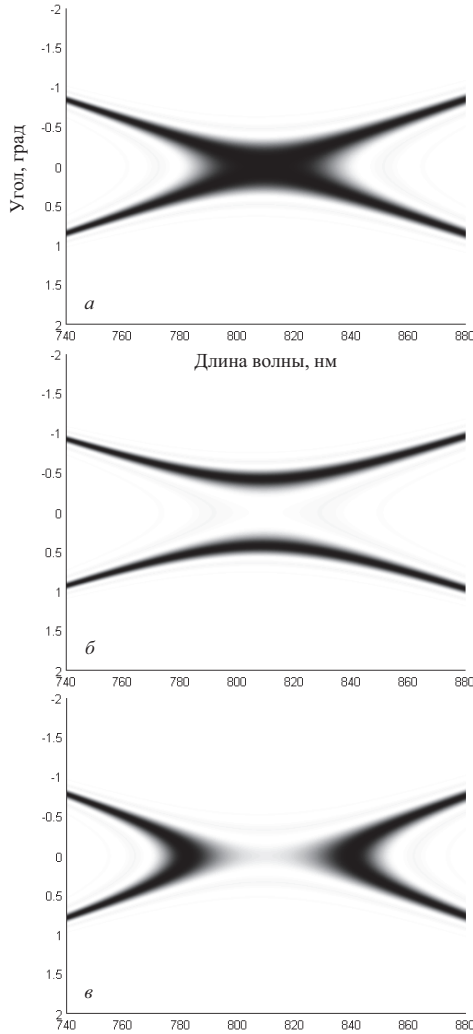
В зависимости от ориентации оптической оси и длины волны накачки, можно в одном и том же кристалле реализовать как синхронизм типа I, так и синхронизм типа II. Пусть длина волны накачки равна 405 нм. Для реализации вырожденного коллинеарного режима СПР типа II нужно ориентировать оптическую ось под углом  $\Psi = 41.45^\circ$ . Этому случаю соответствует график на рисунке 1.1а. Видно, что частотно-угловые зависимости для сигнального и холостого полей касаются друг друга на длине волны 810 нм, так что используя узкую диафрагму можно выделить вырожденное излучение СПР, испускаемое в направлении оси  $z$ . Если увеличить угол между оптической осью и волновым вектором накачки (рис. 1.1б), то в направлении оси  $z$  будет наблюдаться невырожденное СПР, а вырожденное СПР будет неколлинеарным. Если, наоборот, уменьшить угол  $\Psi$  (рис. 1.1в), то частотно-угловые зависимости для сигнального и холостого полей разойдутся по оси длин волн и перестанут пересекаться, так что при дальнейшем уменьшении угла вырожденный режим СПР, в конце концов, становится невозможным. Аналогичные закономерности получаются и в случае СПР типа I, которое наблюдается при ориентации оптической оси в области  $\Psi = 28.687^\circ$  (рис. 1.2). При увеличении угла  $\Psi$  становится невозможным коллинеарный режим СПР, а при уменьшении становится невозможным вырожденный режим СПР.

Если рассматривать частотно-угловые спектры не только в главной плоскости пучка накачки, то можно убедиться, что приведённые частотно-угловые зависимости, имеющие вид парабол, являются на самом деле сечением параболоидов. Это означает, что пространственно-частотная структура поля излучения представляет собой множество конусов с вершиной, расположенной в центре кристалла. Каждый конус соответствует потоку фотонов определенной частоты, при этом сигнальный и холостой фотоны всегда оказываются на противоположных лучах относительно пучка накачки. В частности, рис. 1а соответствует тому, что конусы на длине волны 810 нм касаются друг друга. При увеличении угла  $\Psi$  (рис. 1.1б) эти конусы становятся пересекающимися, а



**Рис. 1.1.** Частотно-угловой спектр СПР типа II в кристалле ВВО, рассчитанный по формуле (1.23). Длина волны накачки 405 нм, длина кристалла 1 см. Угол  $\Psi$ , задающий ориентацию оптической оси кристалла по отношению к волновому вектору накачки (ось  $z$ ) равен  $41.45^\circ$  (а),  $41.65^\circ$  (б) и  $41.25^\circ$  (в).

при уменьшении (рис. 1.1в), наоборот, расходятся. В случае СПР типа I (рис. 1.2) конусы всегда получаются концентрическими.



**Рис. 1.2.** Частотно-угловой спектр СПР типа I в кристалле ВВО, рассчитанный по формуле (1.23). Длина волны накачки 405 нм, длина кристалла 1 см. Угол  $\Psi$ , задающий ориентацию оптической оси кристалла по отношению к волновому вектору накачки (ось  $z$ ) равен  $28.687^\circ$  (а),  $28.71^\circ$  (б) и  $28.671^\circ$  (в).

Наконец, из полученных графиков видно, что спектральная ширина СПР типа I оказывается намного больше спектральной ширины СПР

типа II. Наибольшая разница получается в вырожденном коллинеарном режиме: 40 нм против 1 нм. Подобное соотношение, причина которого будет объяснена в следующем разделе, справедливо и для других нелинейных кристаллов.

#### 1.4. Вектор состояния бифотонного поля. II.

Далее сосредоточимся на случае коллинеарного режима СПР, когда бифотоны генерируются, главным образом, вдоль пучка накачки, т.е. в нашем случае вдоль оси  $z$ . Практически это означает, что поле СПР рассматривается в пределах небольшого телесного угла вокруг оси  $z$ , величина которого определяется условиями волнового синхронизма. В приближении малых углов к оси  $z$  имеем:

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_{\perp}^2} \approx k - \frac{1}{2} \frac{k_{\perp}^2}{k}. \quad (1.27)$$

С учётом относительно небольшой спектральной ширины поля СПР волновые векторы можно разложить в ряд по частоте относительно центральных частот сигнального и холостого полей, ограничиваясь членами второго порядка:

$$k_q = k_{q0} + \alpha_q \nu_q + \beta_q \nu_q^2 + \dots, \quad (1.28)$$

где  $k_{q0} = k_q(\omega_{q0})$ ,

$$\alpha_q = \left. \frac{dk_q}{d\omega} \right|_{\omega_{q0}} = \frac{1}{u_q} \quad (1.29)$$

— обратная групповая скорость фотонов, имеющих несущую частоту  $\omega_{q0}$  и поляризацию  $q$ ,

$$\beta_q = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 k_q}{d\omega^2} \right|_{\omega_{q0}} \quad (1.30)$$

— коэффициент, описывающий дисперсию групповых скоростей,  $\nu_q = \omega - \omega_{q0}$ . В результате, расстройка волновых векторов принимает вид:

$$\Delta k_z = k_p - k_{i0} - k_{s0} - D\nu - D''\nu^2 + D_{\perp}k_{\perp}^2, \quad (1.31)$$

где

$$D = \alpha_i - \alpha_s, \quad D'' = \beta_i + \beta_s, \quad D_{\perp} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k_{i0}} + \frac{1}{k_{s0}} \right) \quad (1.32)$$

и  $\nu = \nu_i = -\nu_s$ . Стандартное условие волнового синхронизма означает, что сумма первых трёх слагаемых в выражении для волновой расстройки равна нулю:  $k_p - k_{i0} - k_{s0} = 0$ . В этом случае вектор состояния поля

СПР можно записать следующим образом:

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \iint d^2\mathbf{k}_\perp \int d\nu F(\nu, \mathbf{k}_\perp) a_i^\dagger(\omega_{i0} + \nu) a_s^\dagger(\omega_{s0} - \nu)|0\rangle, \quad (1.33)$$

где

$$F(\nu, \mathbf{k}_\perp) = \frac{i\chi^{(2)}LE_0}{4c} \sqrt{\frac{\omega_{i0}}{n_i(\omega_{i0})} \frac{\omega_{s0}}{n_s(\omega_{s0})}} h [(-D\nu - D''\nu^2 + D_\perp k_\perp^2)L]. \quad (1.34)$$

Из полученной формулы видно, что максимальная интенсивность излучения бифотонного поля достигается на частотах и направлениях, которые соответствуют строгому выполнению условия пространственного синхронизма, т.е. когда  $\nu = 0$  и  $k_\perp = 0$ . При заданном значении поперечной компоненты волнового вектора  $k_\perp$  или частоты  $\nu$  функция синхронизма  $h(\Delta k_z)L$  позволяет оценить спектральную или угловую ширину поля СПР, соответственно. Рассмотрим спектральную ширину поля СПР, генерируемого строго вдоль оси  $z$ , когда  $\mathbf{k}_\perp = 0$ . Типичные значения параметров  $D$  и  $D''$  для нелинейных кристаллов равны  $D \sim 10^{-12}$  с/см и  $D'' \sim 10^{-28}$  с<sup>2</sup>/см. В случае СПР типа II или невырожденного СПР типа I, имеем  $D\nu \gg D''\nu^2$ , так что членами второго порядка можно пренебречь. В этом случае

$$|F(\nu, 0)|^2 \propto \text{sinc}^2(D\nu L/2) \quad (1.35)$$

и спектральная ширина поля СПР определяется разностью групповых скоростей сигнального и холостого фотонов. Если определить спектральную ширину излучения  $\Delta\omega$  по уровню интенсивности, равному половине максимального значения, т.е. положить  $\Delta\omega = 2x$ , где  $x \approx 1.39$  есть решение уравнения  $\text{sinc}^2(x) = 1/2$ , то получим

$$\Delta\omega \approx \frac{5.57}{DL}. \quad (1.36)$$

Полагая  $L = 1$  см и длину волны излучения 800 нм, получаем спектральную ширину порядка 1 нм. Если же речь идёт о вырожденном СПР типа I, то  $D\nu = 0$  и, наоборот, остаются лишь квадратичные по частоте слагаемые

$$|F(\nu, 0)|^2 \propto \text{sinc}^2(D''\nu^2 L/2). \quad (1.37)$$

Тогда аналогичное определение ширины спектра СПР приводит к следующему результату:

$$\Delta\omega \approx \frac{3.34}{\sqrt{D''}L}. \quad (1.38)$$

Теперь при том же значении длины кристалла и длины волны получаем спектральную ширину десятки нм. Таким образом, разность групповых

скоростей сигнального и холостого фотонов, имеющих ортогональные поляризации (или сильно различающиеся частоты), даёт расстройку волновых векторов, которая существенно больше расстройки вследствие дисперсии групповых скоростей. Поэтому спектральная ширина СПР типа II (или сильно невырожденного СПР типа I) получается существенно меньше спектральной ширины вырожденного СПР типа I. Кроме того, эти случаи отличаются ещё и зависимостью спектральной ширины от длины кристалла.

### 1.5. Плотность потока фотонов и спектральная яркость

Плотность потока фотонов (число фотонов, проходящих в единицу времени через площадку единичной площади, перпендикулярную потоку), испускаемых в пределах телесного угла  $\Delta\Omega$  и частотного интервала  $\Delta\omega$ , рассчитывается по формуле

$$\Delta F = cN\Delta g, \quad (1.39)$$

где  $N$  — число фотонов в одной моде,  $c$  — скорость света и

$$\Delta g = \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^3} \Delta\Omega \Delta\omega \quad (1.40)$$

— объёмная плотность мод одной поляризации, попадающих в частотный интервал  $\Delta\omega$  и телесный угол  $\Delta\Omega$ . Отсюда, величина

$$F_{\omega\Omega} = \frac{N\omega^2}{8\pi^3 c^2} \quad (1.41)$$

имеет смысл плотности потока фотонов на единицу телесного угла и единицу частотного интервала.

Спектральной яркостью называется плотность потока энергии поля (интенсивность) на единицу телесного угла и единицу частотного интервала

$$S_{\omega\Omega} = \hbar\omega F_{\omega\Omega} = \frac{N\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} = NS_{\omega\Omega}^{\text{vac}}, \quad (1.42)$$

где

$$S_{\omega\Omega}^{\text{vac}} = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} \quad (1.43)$$

— так называемая спектральная яркость вакуума [1]. Последняя равна спектральной яркости излучения, имеющего по одному фотону в каждой моде, т.е. удвоенной яркости вакуумных флуктуаций поля.

Следует отметить, что при расчёте плотности потока фотонов, переходящего из вакуума в среду с показателем преломления  $n$ , следует



не только заменить скорость света  $c$  величиной  $c/n$ , но и телесный угол  $\Delta\Omega$  заменить величиной  $\Delta\Omega/n^2$  (в приближении малых углов к оси  $z$ ). В результате, хотя спектральная яркость  $S_{\omega\Omega}$  и оказывается пропорциональной квадрату показателя преломления, величина плотности потока фотонов  $\Delta F$ , как и следовало ожидать, остаётся неизменной.

## 1.6. Скорость счёта фотонов

Пусть  $\eta$  — квантовая эффективность фотодетектора, имеющего апертуру  $A$  и регистрирующего излучение в пределах частотного интервала  $\Delta\omega$  и телесного угла  $\Delta\Omega$ . Тогда среднее число фотоотсчётов в единицу времени, т.е. скорость счёта, даётся формулой

$$w = F_{\omega\Omega}\Delta\omega\Delta\Omega A\eta, \quad (1.44)$$

а среднее число фотоотсчётов за время детектирования  $T$  получается равным

$$P = wT = N\eta \frac{A}{S_{\text{ког}}} \frac{T}{\tau_{\text{ког}}} = N\eta \frac{V_{\text{дет}}}{V_{\text{ког}}}. \quad (1.45)$$

Здесь

$$S_{\text{ког}} = \left( \frac{2\pi c}{\omega} \right)^2 \frac{1}{\Delta\Omega} \quad (1.46)$$

— площадь когерентности поля,

$$\tau_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (1.47)$$

— время когерентности поля,  $V_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}S_{\text{ког}}$  — объём когерентности и  $V_{\text{дет}} = cTA$  — объём детектирования. Таким образом, для скорости счёта фотонов можно записать

$$w = N\eta \frac{A}{S_{\text{ког}}} \frac{1}{\tau_{\text{ког}}}. \quad (1.48)$$

Необходимо отметить, что формула (1.44), а следовательно и (1.45), (1.48), справедлива при условии  $A \leq S_{\text{ког}}$ ,  $T \leq \tau_{\text{ког}}$ . В этом случае среднее число фотонов  $N$  вычисляется в пределах одной моды поля. Если же объём детектирования превышает объём когерентности, то при вычислении  $N$  нужно ещё усреднять по модам, т.е. усреднять по флуктуациям интенсивности поля в пределах площади и времени детектирования. Влияние множителей  $A/S_{\text{ког}} < 1$  и  $T/\tau_{\text{ког}} < 1$  можно учесть простой перенормировкой величины  $\eta$ , так что далее будем считать, что  $A = S_{\text{ког}}$  и  $T = \tau_{\text{ког}}$ .

Вышеприведенные формулы содержат среднее число фотонов в поле и, соответственно, описывают среднее число отсчётов. Более детальное описание, позволяющее исследовать статистику фотоотсчётов, учитывает зависимость вероятности фотоотсчёта от числа заполнения моды  $n$ . Если поле находится в однофотонном состоянии, то, по определению, вероятность фотоотсчёта равна квантовой эффективности  $\eta$ . Обозначим через  $P_k(n)$  вероятность детектирования  $k$  фотонов (или выбивания  $k$  фотоэлектронов) и отсутствия детектирования  $n - k$  фотонов при  $n$ -фотонном состоянии на входе детектора. Нетрудно убедиться, что

$$P_k(n) = \binom{n}{k} \eta^k (1 - \eta)^{n-k}, \quad \sum_{k=0}^n P_k(n) = 1. \quad (1.49)$$

В частности, вероятность срабатывания однофотонного детектора (single-photon detector), т.е. детектора, предназначенного для обнаружения однофотонного состояния, при взаимодействии с  $n$ -фотонным полем, равна

$$P_1(n) = n\eta(1 - \eta)^{n-1}. \quad (1.50)$$

Если детектор не разрешает (не различает) число фотонов (bucket detector), то вероятность фотоотсчёта, которую обозначим через  $P(n)$ , получается равной:

$$P(n) = \sum_{k=1}^n P_k(n) = 1 - (1 - \eta)^n. \quad (1.51)$$

Формулу (1.49) можно обобщить на случай наличия у детектора темновых фотоотсчётов. Пусть вероятность одного темнового фотоотсчёта за время детектирования равна  $p_{dc} \ll 1$ , так что вероятность появления сразу двух ложных фотоэлектронов пренебрежимо мала. Тогда

$$P_k^{\text{total}}(n) = P_k(n)(1 - p_{dc}) + P_{k-1}(n)p_{dc}, \quad (1.52)$$

причём  $\sum_{k=0}^{n+1} P_k^{\text{total}}(n) = 1$ . Следовательно, вероятности срабатывания однофотонного детектора и детектора, не разрешающего число фотонов, принимают вид:

$$P_1^{\text{total}}(n) = n\eta(1 - \eta)^{n-1}(1 - p_{dc}) + (1 - \eta)^n p_{dc}, \quad (1.53)$$

$$P^{\text{total}}(n) = 1 - (1 - \eta)^n(1 - p_{dc}). \quad (1.54)$$

## 1.7. Вектор состояния бифотонного поля в случае импульсной накачки

Поскольку вектор состояния бифотонного поля рассчитывается в первом порядке по теории возмущения, полученные формулы легко

обобщаются на случай импульсной накачки вида

$$E_p(\mathbf{r}, t) = \int d\nu_p E_0(\nu_p) \exp(i(\mathbf{k}(\nu_p)\mathbf{r} - \nu_p t)). \quad (1.55)$$

Каждая спектральная компонента поля накачки вызывает рождение пар фотонов с соответствующей суммой частот  $\nu_p = \nu_i + \nu_s$ . Наличие такой связи приводит к тому, что интегрирование по переменной  $\nu_p$  можно выразить через интегрирование по частоте сигнального или холостого полей. В частности, формула (1.33) принимает в этом случае вид

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \iint d^2\mathbf{k}_\perp \iint d\nu_i d\nu_s F(\nu_i, \nu_s, \mathbf{k}_\perp) a_i^\dagger(\omega_{i0} + \nu_i) a_s^\dagger(\omega_{s0} + \nu_s) |0\rangle, \quad (1.56)$$

где

$$F(\nu_i, \nu_s, \mathbf{k}_\perp) = \frac{i\chi^{(2)}LE_0}{4c} \sqrt{\frac{\omega_{i0}}{n_i(\omega_{i0})} \frac{\omega_{s0}}{n_s(\omega_{s0})}} E_0(\nu_i + \nu_s) \times \\ h \left[ \left( -D_+(\nu_i + \nu_s) - \frac{1}{2}D(\nu_i - \nu_s) + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta_p(\nu_i + \nu_s)^2 - \beta_i\nu_i^2 - \beta_s\nu_s^2 + D_\perp k_\perp^2 \right) L \right], \quad (1.57)$$

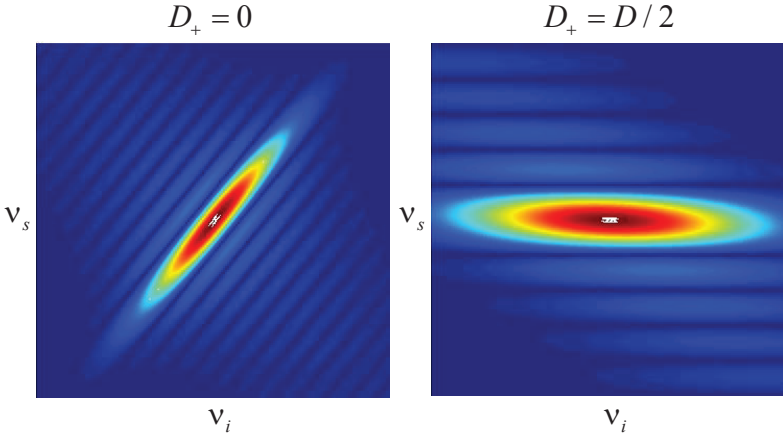
$$D_+ = \frac{1}{2}(\alpha_s + \alpha_i) - \alpha_p, \quad D = \alpha_i - \alpha_s. \quad (1.58)$$

Теория СПР в случае импульсной накачки была развита в работах [14–16]. В случае монохроматической накачки наблюдается антикорреляция испускаемых фотонов по частоте. В случае импульсной накачки возможны разные варианты, вплоть до противоположного (корреляция по частоте). Подробное исследование вопроса сделано в работах [16–20]. Основную идею можно пояснить на примере коллинеарного режима СПР типа II, рассматривая модуль спектральной амплитуды

$$|F(\nu_i \nu_s)| \propto |E_0(\nu_i + \nu_s)| \operatorname{sinc}[(D_+(\nu_i + \nu_s) + (D/2)(\nu_i - \nu_s))L/2], \quad (1.59)$$

квадрат которой задаёт плотность вероятности обнаружения сигнального и холостого фотонов на частотах  $\nu_s$  и  $\nu_i$ , соответственно. Интегрируя эту плотность вероятности по частоте одного из фотонов, получаем спектральное распределение для сопряжённого фотона. В общем случае, очевидно, спектры сигнального и холостого излучений не совпадают. Однако, если выполняется условие  $D_+ = 0$ , то спектры становятся одинаковыми. Более того, если при этом устремить толщину среды к бесконечности  $L \rightarrow \infty$ , то получим

$$|F(\nu_i, \nu_s)| \propto |E_0(\nu_i + \nu_s)| \delta(\nu_s - \nu_i). \quad (1.60)$$



**Рис. 1.3.** Распределение плотности вероятности  $|F(\nu_i, \nu_s)|^2$  для случаев  $D_+ = 0$  и  $D_+ = D/2$ .

Таким образом,  $\nu_s = \nu_i$  и вместо антикорреляции по частоте, которая имеет место в случае монохроматической накачки, наоборот, получается корреляция. Условие  $D_+ = 0$  означает, что средняя обратная групповая скорость сигнального и холостого фотонов равна обратной групповой скорости фотона накачки. Следовательно, скорость одного из фотонов должна быть меньше скорости фотона накачки, а скорость второго фотона, наоборот, больше. Другими словами, корреляция по частоте означает антикорреляцию по времени: чем больше один фотон опережает импульс накачки, тем больше второй фотон отстаёт от последнего.

Другой интересный случай реализуется при выполнении условия  $D_+ = \pm D/2$ . Это означает, что групповая скорость фотона накачки совпадает с групповой скоростью одного из коррелированных фотонов. Тогда

$$|F(\nu_i, \nu_s)| \propto |E_0(\nu_i + \nu_s)| \times \begin{cases} \text{sinc}[(D_+ \nu_s L)], & D_+ = D/2, \\ \text{sinc}[(D_+ \nu_i L)], & D_+ = -D/2. \end{cases} \quad (1.61)$$

Если при этом устремить длительность импульса накачки к нулю, т.е. спектр его сделать очень широким, то спектральная амплитуда бифотона факторизуется, т.е. принимает вид произведения двух функций, каждая из которых зависит только от  $\nu_s$  или  $\nu_i$ . В этом случае между сигнальным и холостым фотонами исчезает частотная корреляция.

На рис. 1.3 приведен типичный вид распределения плотности вероятности  $|F(\nu_i, \nu_s)|^2$  для случаев  $D_+ = 0$  и  $D_+ = D/2$ . Как правило,

горизонтальный профиль распределения, соответствующий, например, его полувысоте, имеет вид эллипса. В случае  $D_+ = 0$  эллипс получается вытянутым вдоль оси  $\nu_+$ , что соответствует частотной корреляции и одинаковому спектру сигнального и холостого фотонов. В случае  $D_+ = \pm D/2$  эллипс вытягивается вдоль одной из осей  $\nu_i, \nu_s$ , что соответствует отсутствию частотной корреляции. В целом, варьируя параметры  $D$  и  $D_+$ , можно ориентировать эллипс под разными углами к координатным осям. Ширина распределения вдоль оси  $\nu_+$  всегда задаётся спектральной шириной импульса накачки, а ширина вдоль перпендикулярной оси  $\nu_-$  определяется параметром  $D$ . Поэтому, если уменьшать спектральную ширину импульса накачки, то, в конце концов, любое распределение вытянется вдоль оси  $\nu_-$ , что соответствует антикорреляции фотонов.

Наряду со спектральной амплитудой бифотона  $F(\nu_i, \nu_s)$  интерес представляет и пространственно-временная амплитуда  $\Phi(t_i, t_s, z_i, z_s)$ , которая получается посредством преобразования Фурье:

$$\Phi(t_i, t_s, z_i, z_s) = \iint d\nu_i d\nu_s F(\nu_i, \nu_s) e^{-i[\nu_i t_i - k_i(\nu_i) z_i + \nu_s t_s - k_s(\nu_s) z_s]}. \quad (1.62)$$

Далее, следуя работе [15], будем рассматривать пространственно-временную амплитуду в плоскости  $z_i = z_s = 0$ , соответствующей выходной грани нелинейной среды. Квадрат модуля этой амплитуды задаёт плотность вероятности обнаружить сигнальный и холостой фотоны на выходе из нелинейной среды в моменты времени  $t_i$  и  $t_s$ , соответственно. Общий случай произвольных значений  $z_i$  и  $z_s$  рассмотрен в работе [21].

Для начала удобно представить спектральную амплитуду в виде

$$F(\nu_i, \nu_s) \propto E_0(\nu_i + \nu_s) \frac{1}{L} \int_{-L}^z dz e^{-i[D_+(\nu_i + \nu_s) + \frac{1}{2}D(\nu_i - \nu_s)]z}. \quad (1.63)$$

После замены переменных

$$\nu_{\pm} = \nu_i \pm \nu_s, \quad t_+ = \frac{t_i + t_s}{2}, \quad \frac{t_{is}}{2} = \frac{t_i - t_s}{2} \quad (1.64)$$

получаем

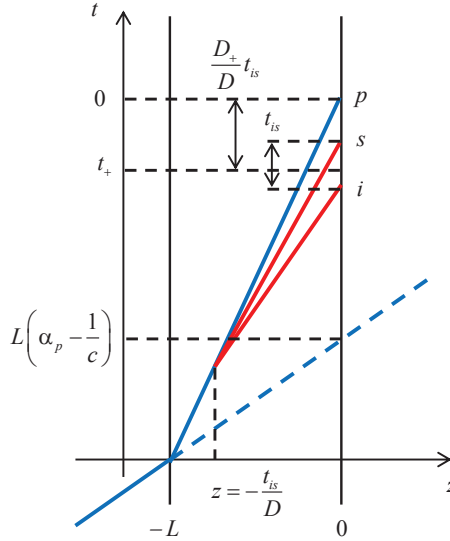
$$\Phi(t_i, t_s) \propto \frac{1}{L} \iint d\nu_+ d\nu_- \int_{-L}^z dz E_0(\nu_+) e^{-i[D_+\nu_+ + \frac{1}{2}D\nu_-]z} e^{-i[\nu_+ t_+ + \nu_- t_{is}/2]}. \quad (1.65)$$

Интегрирование по  $\nu_-$  даёт

$$\int d\nu_- e^{-i[\frac{1}{2}Dz + t_{is}/2]\nu_-} = 2\pi \delta(Dz + t_{is}), \quad (1.66)$$

поэтому

$$\int d\nu_+ E_0(\nu_+) e^{-i[D_+z + t_+]\nu_+} = E_p(t_+ + D_+z) = E_p\left(t_+ - \left(\frac{D_+}{D}\right)t_{is}\right), \quad (1.67)$$



**Рис. 1.4.** Пространственно-временная диаграмма, иллюстрирующая распространение фотонов в процессе СПР для случая  $D < 0$ ,  $D_+ < 0$ .

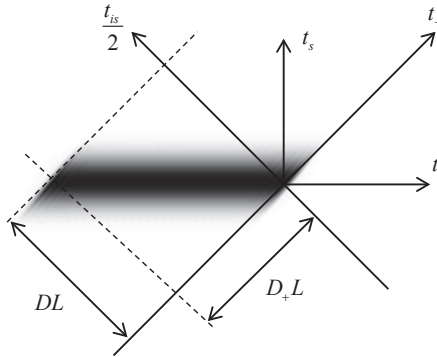
где  $E_p(t)$  — огибающая импульса накачки в точке  $z = 0$ . Наконец, интегрирование по  $z$  приводит к следующей зависимости:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^0 dz \delta(Dz + t_{is}) = \Pi(t_{is}) = \begin{cases} (DL)^{-1}, & \text{если } 0 < t_{is} < DL, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.68)$$

В итоге, приходим к следующему выражению для временной амплитуды бифотона:

$$\Phi(t_i, t_s) \propto \Pi(t_{is}) E_p \left( t_+ - \left( \frac{D_+}{D} \right) t_{is} \right). \quad (1.69)$$

Нетрудно установить физический смысл величин, входящих в последнее выражение:  $t_+$  — момент выхода из нелинейной среды центра тяжести (середины) бифотона,  $-t_{is}/D$  — расстояние от точки рождения бифотона в нелинейной среде до выходной плоскости ( $z = 0$ ),  $-(D_+/D)t_{is}$  — разность времён распространения середины бифотона и импульса накачки от точки рождения бифотона до выходной плоскости. Далее будем считать, что максимум импульса накачки выходит в момент времени  $t = 0$ , т.е.  $t_+ - (D_+/D)t_{is} = 0$ . На рис. 1.4 приведена пространственно-временная диаграмма, иллюстрирующая распространение фотонов трёх взаимодействующих полей для случая, когда



**Рис. 1.5.** Распределение плотности вероятности  $|\Phi(t_i, t_s)|^2$  в случае гауссова импульса накачки. Параметры  $D < 0$ ,  $D_+ < 0$ .

$\alpha_p > \alpha_s > \alpha_i$ , так что  $D < 0$ ,  $D_+ < 0$  и  $t_{is} < 0$ . Пунктирная линия изображает траекторию импульса накачки в отсутствие нелинейной среды. Временной интервал между холостым и сигнальным фотонами  $t_{is}$  на выходе из среды зависит, очевидно, от положения точки, где произошло рождение бифотона. Допустим, что длительность импульса накачки существенно превышает время прохождения нелинейной среды. Поскольку вероятность рождения не зависит от координаты  $z$ , получаем равномерное распределение величины  $t_{is}$  от нуля до максимального значения  $DL$ , которое описывается функцией  $\Pi(t_{is})$ . Это означает, в частности, что если один из фотонов будет обнаружен на выходе из среды в некоторый момент времени, то временная форма второго фотона будет иметь вид прямоугольного импульса длительности  $DL$ . Этот импульс должен либо начинаться, либо заканчиваться в момент детектирования второго фотона, в зависимости от соотношения их групповых скоростей. Если наоборот, импульс накачки очень короткий, то в пределе дельта-образного импульса  $E_p(t) \propto \delta(t)$  имеем связь  $t_+ = (D_+/D)t_{is}$ , так что при фиксации  $t_s$  или  $t_i$  (детектировании одного из фотонов) временная форма второго фотона будет с некоторым масштабированием воспроизводить форму импульса накачки, если только  $D_+/D \neq 0$ . Подобные закономерности легко понять, исходя из общего вида плотности вероятности  $|\Phi(t_i, t_s)|^2$ , который приведён на рис. 1.5. Временная форма одного из фотонов, при условии детектирования второго в определённый момент времени, будет описываться сечением данного распределения вдоль соответствующей временной координаты. Профиль распределения вдоль оси  $t_+$  задаётся импульсом накачки, а сдвиг профиля вдоль осей  $t_+$  и  $t_{is}$  определяется величинами  $D_+L$  и  $DL$ , соответственно.

## 1.8. Разложение Шмидта

Удобным средством анализа корреляционных свойств состояния бифотонного поля является разложение Шмидта [22]. Пусть исходный вектор состояния равен

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \iint d\nu_i d\nu_s F(\nu_i, \nu_s) a^\dagger(\nu_i) b^\dagger(\nu_s). \quad (1.70)$$

Разложение Шмидта для функции  $F(\nu_i, \nu_s)$  имеет вид:

$$F(\nu_i, \nu_s) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \alpha_n(\nu_i) \beta_n(\nu_s), \quad \sum_n \lambda_n = 1, \quad (1.71)$$

где функции (моды) Шмидта находятся путём решения следующей системы интегральных уравнений на собственные значения [22]:

$$\int d\nu \rho_i(\nu_i, \nu) \alpha_n(\nu) = \lambda_n \alpha_n(\nu_i), \quad (1.72)$$

$$\int d\nu \rho_s(\nu_s, \nu) \beta_n(\nu) = \lambda_n \beta_n(\nu_s). \quad (1.73)$$

Здесь

$$\rho_i(\nu_i, \nu'_i) = \int d\nu_s F(\nu_i, \nu_s) F^*(\nu'_i, \nu_s), \quad (1.74)$$

$$\rho_s(\nu_s, \nu'_s) = \int d\nu_i F(\nu_i, \nu_s) F^*(\nu_i, \nu'_s) \quad (1.75)$$

— приведённые операторы плотности подсистем, соответствующих холостому и сигнальному полю. Решение этих уравнений, обычно, находится численным образом. В случае СПР типа II и коротких импульсов накачки функции Шмидта хорошо описываются функциями Эрмита [18, 22]. Поскольку функции  $\alpha_n(\nu)$ ,  $\beta_n(\nu)$  образуют ортонормированный базис, можно определить соответствующие им операторы рождения и уничтожения:

$$A_n^\dagger = \int d\nu \alpha_n(\nu) a^\dagger(\nu), \quad (1.76)$$

$$B_n^\dagger = \int d\nu \beta_n(\nu) b^\dagger(\nu), \quad (1.77)$$

так что однофотонные состояния сигнального и холостого полей в этом базисе будут иметь вид

$$|1_{n_i}\rangle = \int d\nu \alpha_n(\nu) a_i^\dagger \nu |0\rangle = A_n^\dagger |0\rangle, \quad (1.78)$$

$$|1_{n_s}\rangle = \int d\nu \beta_n(\nu) a_s^\dagger \nu |0\rangle = B_n^\dagger |0\rangle, \quad (1.79)$$



а вектор состояния бифотонного поля

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \sum_n \sqrt{\lambda_n} |1_{n_i}\rangle |1_{n_s}\rangle. \quad (1.80)$$

Разложение Шмидта существенно упрощает описание квантового состояния бифотонного поля, поскольку двойной интеграл (1.70) заменяется однократной суммой (1.80), и является наиболее удобным для описания квантовых корреляций. Действительные и неотрицательные числа  $\lambda_n$  задают вероятность обнаружения пары фотонов в модах  $\alpha_n(\nu_i)$ ,  $\beta_n(\nu_s)$ . Несмотря на то, что исходное представление (1.70) является непрерывным, очень часто лишь небольшое число коэффициентов  $\lambda_n$  вносят существенный вклад, так что разложение Шмидта позволяет определить эффективную размерность пространства состояний бифотонного поля. Степень перепутывания двухфотонного состояния определяется кооперативным параметром (числом Шмидта)

$$K = \left( \sum \lambda_n^2 \right)^{-1}. \quad (1.81)$$

Число  $K$  принимает минимальное значение, равное 1, в том случае, когда разложение Шмидта содержит лишь одно слагаемое, т.е. когда бифотонное состояние является факторизованным. Если  $K > 1$ , то состояние бифотона нельзя представить в виде произведения однофотонных состояний, соответствующих модам сигнального и холостого полей, и оно является перепутанным.

Частотно-перепутанные состояния бифотонного поля характеризуются спектральным распределением  $|F(\nu_i, \nu_s)|^2$ , вытянутым вдоль оси  $\nu_+$  ( $\nu_-$ ) и одновременно сжатым вдоль оси  $\nu_-$  ( $\nu_+$ ). С этой точки зрения в качестве меры перепутанности удобно взять экспериментально измеряемую величину

$$R = \Delta_{s(i)} / \Delta_{s(i)}^{\text{cond}}, \quad (1.82)$$

где  $\Delta_{s(i)}$  — ширина безусловного распределения по частоте сигнального (холостого) поля и  $\Delta_{s(i)}^{\text{cond}}$  — ширина условного распределения по частоте сигнального (холостого) поля при фиксированной частоте холостого (сигнального) поля. Безусловное распределение определяется как маргинальное

$$p(\nu_{s(i)}) = \int d\nu_{i(s)} |F(\nu_i, \nu_s)|^2, \quad (1.83)$$

а условное задаётся в виде

$$p^{\text{cond}}(\nu_{s(i)}) = \frac{|F(\nu_i, \nu_s)|^2}{\int d\nu_{s(i)} |F(\nu_i, \nu_s)|^2} \Bigg|_{\text{при заданном } \nu_{i(s)}}. \quad (1.84)$$

Число Шмидта и параметр  $R$  имеют очень близкие значения для разных состояний бифотонного поля [21, 23].

## Глава 2

# Генерация однофотонных состояний

### 2.1. Однофотонный волновой пакет

Под однофотонным состоянием понимается элементарное возбуждение пространственно-временной моды электромагнитного поля. Элементарный характер возбуждения означает, что состояние поля является неделимым в процессе фотодетектирования, а пространственно-временная мода есть не что иное, как суперпозиция мод бегущих волн, т.е. волновой пакет. Именно однофотонные волновые пакеты, наиболее близко отвечающие интуитивному понятию фотона, используются в качестве элементарных носителей квантовой информации — кубитов, которые можно передавать на большие расстояния (flying qubits). Формальное определение однофотонного волнового пакета выглядит следующим образом [3]:

$$|\psi\rangle = \sum_q \int d\mathbf{k} F_q(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}q}^\dagger |0\rangle, \quad \sum_q \int d\mathbf{k} |F_q(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (2.1)$$

Здесь  $a_{\mathbf{k}q}^\dagger$  — оператор рождения фотона в моде плоской волны, соответствующей волновому вектору  $\mathbf{k}$  и поляризации, задаваемой индексом  $q$ . Функция  $F$  называется амплитудой однофотонного состояния. Квадрат модуля амплитуды задаёт плотность вероятности обнаружить фотон с заданным волновым вектором и поляризацией. При этом подразумевается, что спектральная ширина однофотонного волнового пакета существенно меньше его несущей частоты. В противном случае распределение фотонной плотности может существенно отличаться от распределения энергии поля и вероятности фотодетектирования.

Примером пространственно-временных мод электромагнитного поля, однофотонные состояния которых можно назвать однофотонными импульсами, являются моды Шмидта, рассмотренные в разд. 1.8.

## 2.2. Идеальный однофотонный источник

Идеальный однофотонный источник должен удовлетворять следующим требованиям:

- Световой импульс испускается в заданную пространственно-временную моду электромагнитного поля. Практически это означает, что квантовое состояние поля светового импульса должно быть чистым (что означает неразличимость испускаемых фотонов и спектральную ограниченность однофотонных импульсов), а время и направление испускания не должны меняться случайным образом.
- Вероятность обнаружения одного фотона в световом импульсе на выходе источника (эффективность источника) равна 100%. Это означает, что световой импульс, с одной стороны, не должен содержать вакуумного состояния и, с другой стороны, не должен содержать более одного фотона.

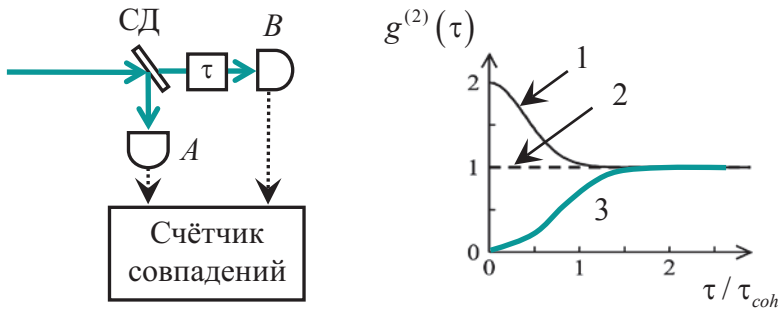
Важнейшим параметром, описывающим качество однофотонного источника, является степень соответствия состояния на выходе источника тому состоянию, которое нужно получить. Если состояние на выходе описывается оператором плотности  $\rho$ , а целевое состояние задаётся вектором  $|\psi\rangle$ , то качество  $F$  (Fidelity) источника определяется как

$$F = \langle \psi | \rho | \psi \rangle. \quad (2.2)$$

Эта величина равна 1 в случае полного соответствия, и равна 0 в случае максимального несоответствия (когда состояния ортогональны). В экспериментах, как правило, измеряется значение автокорреляционной функции поля при нулевой задержке  $g^{(2)}(0)$  (рис. 2.1). При условии генерации в одну пространственно-временную моду поля (стабильный волновой пакет) имеем:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle}{\langle a^{\dagger} a \rangle^2}, \quad (2.3)$$

где  $a(a^{\dagger})$  — операторы уничтожения (рождения) фотонов в заданной пространственно-временной моде на выходе источника. В случае однофотонного состояния эта величина должна быть равна нулю. Кроме того, в одномодовом случае существует однозначная связь между качеством  $F$  и значением автокорреляционной функции, которую можно записать в виде  $F = 1 - g^{(2)}(0)/2$ , когда  $g^{(2)}(0) \ll 1$ . Отличие качества  $F$  от единицы, или величины  $g^{(2)}(0)$  от нуля, описывает вклад многофотонных состояний в данную моду поля. Если же генерация многомодовая, то ситуация усложняется, поскольку потеря качества может



**Рис. 2.1.** Слева: схема измерения автокорреляционной функции поля  $g^{(2)}(\tau)$  с помощью интерферометра Брауна—Твисса. Поток фотонов расщепляется на два с помощью светоделителя СД. Затем фотоны направляются на фотодетекторы  $A$  и  $B$  с относительной задержкой  $\tau$ . В случае слабой интенсивности входного пучка, автокорреляционная функция равна  $p_{AB}/p_A p_B$ , где  $p_{AB}$  — скорость счёта совпадений, и  $p_A$ ,  $p_B$  — скорости счёта на детекторах. Справа: типичные зависимости  $g^{(2)}(\tau)$  для суперпуассоновского света (1), когерентного света (2) и субпуассоновского света (3), где  $\tau_{coh}$  — время когерентности. В случае однофотонного состояния  $g^{(2)}(0) = 0$ .

быть связана не только с вкладом многофотонных состояний, но и с различимостью фотонов, что соответствует смешанному состоянию на выходе источника. В этом случае одного значения  $g^{(2)}(0)$  недостаточно для характеристики источника. Тогда подходящей мерой является видность антикорреляционного провала Хонга—Оу—Манделя (см. гл. 3), которая достигает 100% только при условии, что два независимых состояния на входе в интерферометр являются однофотонными и чистыми, т.е. неразличимыми.

### 2.3. Условное приготовление однофотонных состояний в режиме СПР

В основе работы однофотонного источника на основе СПР (рис. 2.2) лежит корреляция чисел фотонов в модах рассеянного поля. Детектирование одного из фотонов в паре (скажем, холостого) однозначно говорит о наличии второго фотона (сигнального), поэтому такие источники называются источниками с оповещением (heralded source). Поскольку эффективность оповещающего детектора меньше 100%, отсутствие фотоотсчёта не означает отсутствия сигнального фотона. Чтобы избавиться от таких неконтролируемых вкладов в выходное поле источ-

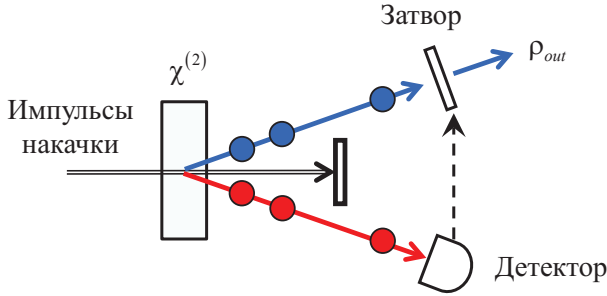


Рис. 2.2. Схема источника на основе СПР

ника, на пути сигнального фотона можно поставить затвор, который будет открываться только по сигналу детектора (триггерному импульсу). Идея такого условного приготвления однофотонных состояний была предложена Д.Н. Клышко в 1977 году [24], а первый эксперимент был поставлен Хонгом и Манделем в 1986 году [25].

Чтобы такой источник создавал чистые однофотонные состояния, соответствующие одной пространственно-временной моде электромагнитного поля, необходимо выполнение двух условий: 1) в процессе СПР изначально создаётся факторизованное состояние, либо при детектировании происходит селекция нужной пространственно-временной моды; 2) вклад многофотонных состояний в выходное поле пренебрежимо мал.

Рассмотрим сначала проблему факторизации состояний сигнального и холостого полей. Для упрощения рассуждений предположим, что моды отличаются друг от друга лишь по частоте. Тогда вектор состояния бифотонного поля запишется в виде

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \iint d\nu_i d\nu_s F(\nu_i, \nu_s) |\nu_i\rangle |\nu_s\rangle, \quad (2.4)$$

где  $|\nu\rangle = a^\dagger(\nu)|0\rangle$  — однофотонное состояние моды частоты  $\nu$ . Пусть оповецающий детектор регистрирует холостой фотон на определённой частоте  $\nu_i^0$ . В этом случае происходит проецирование состояния поля на одну моду, так что оператор измерения имеет вид  $\Pi(\nu_i^0) = |\nu_i^0\rangle\langle\nu_i^0|$ . Состояние сигнального поля, при условии, что произошло детектирование холостого фотона, равно

$$\rho_s = \text{Tr}_i\{|\psi\rangle\langle\psi|\Pi(\nu_i^0)\} = \langle\nu_i^0|\psi\rangle\langle\psi|\nu_i^0\rangle = |\phi_s\rangle\langle\phi_s|, \quad (2.5)$$

где

$$|\phi_s\rangle = \int d\nu_s F(\nu_i^0, \nu_s) |\nu_s\rangle. \quad (2.6)$$

Таким образом, как и ожидалось, состояние сигнального фотона также является чистым состоянием. Однако, если при детектировании холостого фотона не проецировать на определённую моду, то нужно усреднить по всем модам холостого фотона, так что оператор измерения будет иметь вид единичного оператора  $\Pi = I = \int d\nu_i |\nu_i\rangle\langle\nu_i|$ . Тогда получаем

$$\rho_s = \text{Tr}_i\{|\psi\rangle\langle\psi|\} = \int d\nu_i \langle\nu_i|\psi\rangle\langle\psi|\nu_i\rangle = \int d\nu |\phi_s(\nu)\rangle\langle\phi_s(\nu)|, \quad (2.7)$$

где

$$|\phi_s(\nu)\rangle = \int d\nu_s F(\nu, \nu_s) |\nu_s\rangle. \quad (2.8)$$

Следовательно, состояние сигнального фотона получается смешанным.

Ясно, что выделение одной моды из непрерывного спектра практически невозможно и приближение к этой идеальной ситуации означает обращение в ноль эффективности источника. Одним из методов решения проблемы является факторизация спектральных амплитуд сигнального и холостого фотонов [20], когда выделение одной частотной моды не нужно. Действительно, если  $F(\nu_i, \nu_s) = F_i(\nu_i) F_s(\nu_s)$ , тогда вместо (2.7) опять получим чистое состояние

$$\rho_s = \int d\nu |F_i(\nu)|^2 |\phi_s\rangle\langle\phi_s| = |\phi_s\rangle\langle\phi_s|, \quad (2.9)$$

где

$$|\phi_s\rangle = \int d\nu_s F_s(\nu_s) |\nu_s\rangle. \quad (2.10)$$

Факторизация амплитуд достигается при определённом соотношении между групповыми скоростями фотонов сигнального поля, холостого поля и поля накачки, которое зависит от спектральной ширины импульса накачки (в общем случае, требуется ещё и линейная частотная модуляция импульса накачки). Таким образом, возможность факторизации спектров зависит от дисперсионных свойств нелинейной среды. Другим подходом является детектирование в базисе Шмидта [22], в котором вектор состояния бифотонного поля принимает вид (1.80). Тогда очевидно, что при детектировании холостого фотона в состоянии, которое соответствует одному из векторов базиса Шмидта  $|1_{n_i}\rangle$ , однофотонное состояние сигнального поля оказывается в соответствующем ему базисном состоянии  $|1_{n_s}\rangle$ . При этом вклад в результирующее поле дают все частотные моды и практическая задача состоит в том, чтобы реализовать такой режим СПР, при котором вероятность генерации факторизованного бифотонного состояния максимальна (минимизировать число членов в разложении Шмидта).

Теперь рассмотрим вклад многофотонных состояний в выходное поле источника. В случае генерации в одну пространственно-временную

моду сигнального и холостого полей, вектор состояния поля СПР можно записать в виде

$$|\psi\rangle = c_0|0_i0_s\rangle + c_1|1_i1_s\rangle + \dots, \quad c_n = [\text{th } r]^n / \text{ch } r, \quad (2.11)$$

где  $r$  — параметр накачки (см. раздел 1.1). Пусть  $p_n$  — вероятность фотоотсчёта при взаимодействии детектора с  $n$ -фотонным состоянием (см. раздел 1.6). Тогда вероятность обнаружить  $n$ -фотонное состояние после воздействия одного импульса накачки равна

$$P(n) = p_n |c_n|^2, \quad (2.12)$$

а вероятность триггерного импульса (оповещения)

$$P_{hrld} = \sum_n P(n) = p_1 |c_1|^2 + p_2 |c_2|^2 + \dots, \quad (2.13)$$

если пренебречь вкладом темновых фотоотсчётов. При наличии затвора, который открывается только по сигналу с детектора, оператор плотности поля на выходе источника можно записать в виде:

$$\rho_{\text{out}} = (1 - P_{hrld})|0\rangle\langle 0| + P_{hrld} \rho_{hrld}, \quad (2.14)$$

где

$$\rho_{hrld} = \frac{P(1)|1\rangle\langle 1| + P(2)|2\rangle\langle 2| + \dots}{P_{hrld}} = \sum_{n=1}^{\infty} P'(n)|n\rangle\langle n| \quad (2.15)$$

— оператор плотности поля при условии срабатывания детектора.

Зная оператор плотности, можно рассчитать все основные характеристики однофотонного источника. В частности, эффективность, т.е. вероятность генерации однофотонного состояния при воздействии одного импульса накачки, равна

$$\text{Eff} = P(1), \quad (2.16)$$

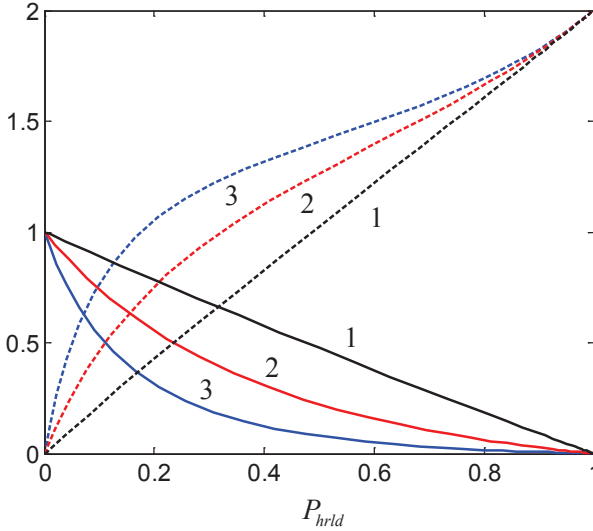
функция автокорреляции поля

$$g^{(2)}(0) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P'(n)n(n-1)}{[\sum_{n=1}^{\infty} P'(n)n]^2}, \quad P'(n) = \frac{P(n)}{P_{hrld}} \quad (2.17)$$

и степень соответствия выходного состояния однофотонному состоянию (качество источника)

$$F = P'(1). \quad (2.18)$$

Последнюю величину ещё называют эффективностью условного приготовления фотона (heralding efficiency). На рис. 2.3 приведены зависимости функции автокорреляции и качества источника от вероятности оповещения при различных значениях эффективности детектора, который не разрешает число фотонов. В этом случае  $p_n = 1 - (1 - \eta)^n$ , где



**Рис. 2.3.** Зависимость функции автокорреляции (пунктирные линии) и качества (сплошные линии) от вероятности оповещения при различных значениях эффективности детектора, не разрешающего число фотонов: 0.95 (кривые 1), 0.5 (кривые 2) и 0.25 (кривые 3).

$\eta$  — эффективность детектирования. Видно, что чем меньше вероятность оповещения, т.е. чем меньше параметр накачки, тем меньше получается вклад многофотонных состояний. Другими словами, качество источника повышается за счёт уменьшения его эффективности. Если импульс накачки слабый, то  $1 \gg P(1) \gg P(2) \gg \dots$ , и  $P_{hrld} \approx P(1)$ . Тогда

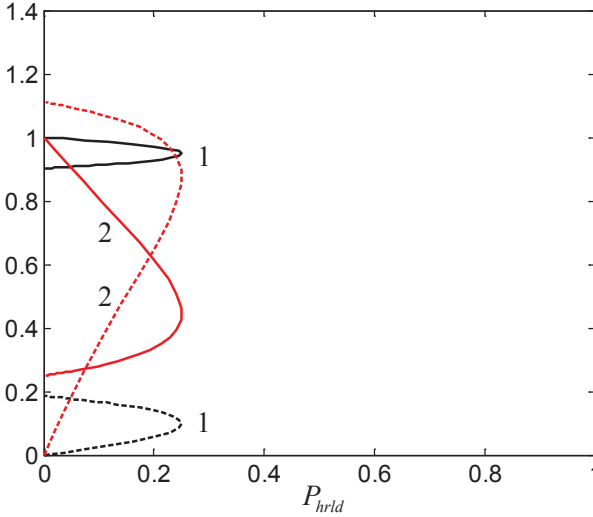
$$g^{(2)}(0) \approx \frac{2P'(2)}{P'(1)^2} \approx \frac{2P(2)}{P(1)}, \quad F \approx 1 - \frac{g^{(2)}(0)}{2}. \quad (2.19)$$

Следовательно, в случае детектора, не разрешающего число фотонов, получаем

$$g^{(2)}(0) \approx \frac{2[1 - (1 - \eta)^2]}{\eta} \frac{|c_2|^2}{|c_1|^2} = \frac{2[1 - (1 - \eta)^2]}{\eta} |c_1|^2, \quad (2.20)$$

так что значение функции автокорреляции  $g^{(2)}(0)$  оказывается пропорциональным вкладу однофотонного состояния  $|c_1|^2$  в моды поля СПР. Если наоборот, увеличивать параметр накачки, то вероятность оповещения растёт, приближаясь к единице. При этом значение функции автокорреляции приближается к двум, что соответствует статистике теплового поля.





**Рис. 2.4.** Зависимость функции автокорреляции (пунктирные линии) и качества оповещения (сплошные линии) от вероятности оповещения при различных значениях эффективности однофотонного детектора: 0.95 (кривые 1), 0.5 (кривые 2).

Ситуация несколько улучшается, если использовать однофотонный детектор, для которого  $p_1 = \sum_m m\eta(1-\eta)^m$ . В этом случае, тех же самых значений качества можно добиться при существенно большей вероятности оповещения (рис. 2.4). Для слабой накачки будем иметь

$$g^{(2)}(0) \approx 4(1-\eta) \frac{|c_2|^2}{|c_1|^2} = 4(1-\eta)|c_1|^2. \quad (2.21)$$

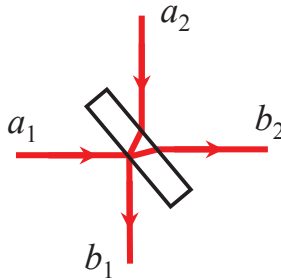
Сравнивая формулы (2.21) и (2.20), приходим к выводу, что использование однофотонного детектора выгоднее любого обычного, если его эффективность превышает 50%. В идеальном случае, когда эффективность однофотонного детектора равна единице, функция автокорреляции  $g^{(2)}(0)$  обращается в ноль, поскольку детектор однозначно определяет число фотонов в поле. При увеличении параметра накачки вероятность оповещения сначала возрастает до 0.25, а затем уменьшается. Это легко объяснить, если рассмотреть функцию распределения числа фотонов в поле СПР, которая задаётся величиной  $|c_n|^2$ . Поскольку однофотонный детектор реагирует только на состояние с  $n = 1$ , максимальная вероятность оповещения достигается при максимальном значении  $|c_1|^2$ , которое как раз равно 0.25 при значении параметра накачки  $r^2 \approx 1/2$ .

## Глава 3

# Двухфотонная интерференция

### 3.1. Эффект антикорреляции фотоотсчётов

Предположим, что две моды электромагнитного поля, описываемые операторами уничтожения  $a_1$  и  $a_2$  смешиваются с помощью полупрозрачного зеркала (светоделителя), в результате чего получаются моды, описываемые операторами  $b_1$  и  $b_2$  (рис. 3.1). Влияние светоделителя удобно описывать с помощью феноменологической матрицы рассеяния, связывающей операторы поля на входе и выходе. В отсутствие диссипации и нелинейных эффектов матрица рассеяния должна быть унитарной, а с учётом инвариантности преобразования относительно времени ещё и симметричной [26]. Поскольку эти требования не опреде-



**Рис. 3.1.** Модель полупрозрачного зеркала, смешивающего две моды электромагнитного поля.

ляют матрицу рассеяния однозначно, можно использовать различные представления, что никак не сказывается на результатах расчётов. Для определённости возьмём следующий вариант:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & it \\ it & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где  $r$  и  $t$  — модули коэффициентов отражения и пропускания по амплитуде ( $r^2 + t^2 = 1$ ).

Используя соотношения между операторами, можно рассчитать средние значения различных наблюдаемых на выходе светоделителя при различных квантовых состояниях на входе. Пусть каждая мода на входе находится в состоянии с определённым числом фотонов  $m$ . Тогда среднее число фотонов в модах на выходе получается равным

$$\langle b_1^\dagger b_1 \rangle = \langle b_2^\dagger b_2 \rangle = m, \quad (3.2)$$

а функция корреляции второго порядка, определяющая вероятность совместного детектирования фотонов в отражённом и прошедшем пучках, принимает вид

$$\langle b_1^\dagger b_2^\dagger b_2 b_1 \rangle = (r^2 - t^2)^2 m^2 + 2r^2 t^2 m(m - 1). \quad (3.3)$$

Рассмотрим 50%-ый светоделитель, у которого  $r = t = 1/\sqrt{2}$ . Если на входе светоделителя каждая мода находится в однофотонном состоянии, то вероятность совместного детектирования обращается в ноль, хотя вероятность детектирования фотонов на каждом детекторе не равна нулю. Это и есть эффект антикорреляции фотоотсчётов. Объяснить этот эффект можно только тем, что фотоны никогда не выходят из светоделителя в разные стороны, а всегда направляются к одному из детекторов, который выбирается случайным образом.

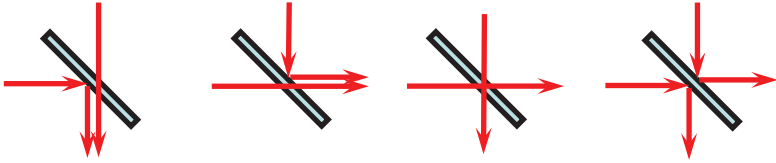
Чтобы объяснить причину такого поведения фотонов, рассмотрим ту же самую ситуацию в представлении Шредингера. Состояние поля до светоделителя равно  $|11\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |00\rangle$ . Выражая операторы, соответствующие входным модам, через операторы, соответствующие выходным модам, с помощью обратных к (3.1) соотношений

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ir & t \\ t & -ir \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

получаем вектор состояния поля после светоделителя:

$$|\psi\rangle = (irb_1^\dagger + tb_2^\dagger)(tb_1^\dagger + irb_2^\dagger)|00\rangle = (t^2 - r^2)|11\rangle + irt(|20\rangle + |02\rangle). \quad (3.5)$$

Четыре члена в формуле (3.5) соответствуют четырём возможным траекториям фотонов, как показано на рис. 3.2. Среди них имеются две траектории, которые приводят к совместному детектированию: либо оба фотона проходят через делитель, либо оба отражаются от него. Поскольку детекторы не могут различить эти две возможности, то амплитуда вероятности совместного детектирования есть сумма соответствующих этим траекториям амплитуд. Последние имеют противоположные знаки из-за фазовых сдвигов, возникающих при отражении и прохождении светоделителя. Поэтому их сумма обращается в нуль,



**Рис. 3.2.** Возможные траектории фотонов при наблюдении двухфотонной интерференции с помощью светоделителя.

когда делитель является 50%-ым. Таким образом, эффект антикорреляции является следствием деструктивной интерференции двухфотонных амплитуд вероятности.

Следует отметить, что эффект антикорреляции невозможно объяснить в рамках классической интерференции полей. Действительно, пусть две входные моды находятся в когерентных состояниях с одинаковой амплитудой, но разной фазой:  $|\alpha_1\rangle = |\alpha| e^{i\theta_1}$  и  $|\alpha_2\rangle = |\alpha| e^{i\theta_2}$ . Тогда для среднего числа фотонов и функции корреляции на выходе получаем:

$$\langle b_1^\dagger b_1 \rangle = |\alpha|^2 (1 + \sin(\theta_2 - \theta_1)), \quad (3.6)$$

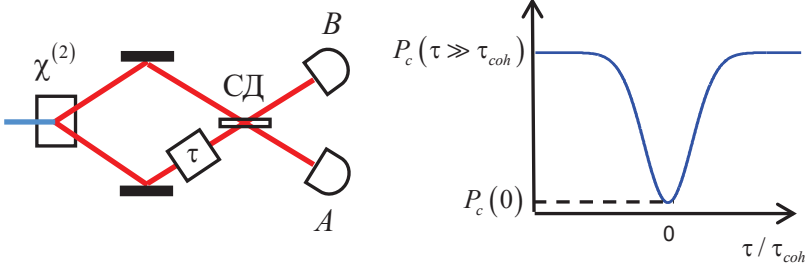
$$\langle b_2^\dagger b_2 \rangle = |\alpha|^2 (1 - \sin(\theta_2 - \theta_1)), \quad (3.7)$$

$$\langle b_1^\dagger b_2^\dagger b_2 b_1 \rangle = |\alpha|^4 \cos^2(\theta_1 - \theta_2). \quad (3.8)$$

Следовательно, вероятность совпадений фотоотсчётов может обратиться в нуль только за счёт того, что скорость счёта в одном из детекторов равна нулю. Эффект антикорреляции можно смоделировать лишь при помощи искусственного предположения, что разность фаз  $\theta_2 - \theta_1$  случайным образом принимает одно из двух значений  $\pm\pi/2$ .

### 3.2. Интерферометр Хонга—Оу—Манделя

Эффект антикорреляции наблюдался впервые в работе Хонга, Оу и Манделя [27] в 1987 году с использованием бифотонного поля, создаваемого в процессе СПР. Схема установки, которая с тех пор называется интерферометром Хонга—Оу—Манделя, приведена на рис. 3.3. Сигнальные и холостые фотоны направляются на два входа 50%-го светоделителя и скорость счёта совпадений измеряется в зависимости от задержки, устанавливаемой между фотонами до светоделителя. Эта зависимость имеет характерный вид провала: когда пути сигнального и холостого фотонов до светоделителя точно равны, скорость счёта падает до уровня случайных совпадений. Если же один из однофотонных



**Рис. 3.3.** Слева: схема интерферометра Хонга—Оу—Манделя. Сигнальные и холостые фотоны направляются на два входа светоделителя СД и скорость совпадений фотоотсчетов  $P_c$  на детекторах  $A$  и  $B$  регистрируется как функция относительной задержки  $\tau$ . Справа: типичная зависимость  $P_c(\tau)$ , имеющая вид провала.

волновых пакетов задерживается относительно другого на время, превышающее его длительность (время когерентности бифотонного поля  $\tau_{coh}$ ), но меньшее времени разрешения схемы совпадений, то скорость совместного счёта становится равной половине своего максимального значения, достигаемого в том случае, когда каждый фотон направляется непосредственно к своему детектору. Глубина провала характеризуется видностью  $\mathcal{V} = 1 - P_c(0)/P_c(\tau \gg \tau_{coh})$ .

Для количественного описания эффекта антикорреляции запишем состояние бифотонного поля в виде:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \iint d\omega_1 d\omega_2 F(\omega_1, \omega_2) |\omega_1\rangle |\omega_2\rangle = \\
 &= \iint d\omega_1 d\omega_2 F(\omega_1, \omega_2) a_1^\dagger(\omega_1) a_2^\dagger(\omega_2) |0\rangle. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Допустим, что функция пропускания оптического элемента, создающего задержку во времени, равна  $\phi(\omega)$  (в отсутствии потерь  $|\phi(\omega)| = 1$ ). Тогда непосредственно перед светоделителем имеем

$$|\psi\rangle = \iint d\omega_1 d\omega_2 F(\omega_1, \omega_2) a_1^\dagger(\omega_1) a_2^\dagger(\omega_2) \phi(\omega_2) |0\rangle. \quad (3.10)$$

После прохождения 50%-го светоделителя состояние преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \frac{1}{2} \iint d\omega_1 d\omega_2 F(\omega_1, \omega_2) [b_2^\dagger(\omega_1) b_1^\dagger(\omega_2) - b_1^\dagger(\omega_1) b_2^\dagger(\omega_2) + \\
 &\quad ib_1^\dagger(\omega_1) b_1^\dagger(\omega_2) + ib_2^\dagger(\omega_1) b_2^\dagger(\omega_2)] \phi(\omega_2) |0\rangle. \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Скорость совпадений фотоотсчётов определяется лишь первыми двумя слагаемыми. Обозначим соответствующую часть вектора состояния через  $|\psi_{\text{совп}}\rangle$ . После переобозначения переменных интегрирования, приходим к выражению:

$$|\psi_{\text{совп}}\rangle = \frac{1}{2} \iint d\omega_1 d\omega_2 [F(\omega_1, \omega_2)\phi(\omega_2) - F(\omega_2, \omega_1)\phi(\omega_1)]|\omega_1, \omega_2\rangle. \quad (3.12)$$

Из полученной формулы можно сразу сделать вывод, что при нулевой задержке, когда  $\phi(\omega) = 1$ , скорость счёта совпадений обращается в нуль, если спектральная амплитуда бифотонного поля является симметричной функцией:  $F(\omega_1, \omega_2) = F(\omega_2, \omega_1)$ .

Чтобы проанализировать зависимость скорости счёта совпадений от времени задержки, рассмотрим типичную ситуацию, когда время разрешения схемы совпадений существенно больше времени когерентности поля. В этом случае скорость совместного счёта оказывается пропорциональной выражению

$$P_c = \iint d\omega_1 d\omega_2 |\langle\psi|a_1^\dagger(\omega_1)a_2^\dagger(\omega_2)a_1(\omega_1)a_2(\omega_2)|\psi\rangle|^2, \quad (3.13)$$

которое удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} P_c &= \iint d\omega_1 d\omega_2 \left| \sum_n \langle\psi|a_1^\dagger(\omega_1)a_2^\dagger(\omega_2)|n\rangle \langle n|a_1(\omega_1)a_2(\omega_2)|\psi\rangle \right|^2 = \\ &= \iint d\omega_1 d\omega_2 \left| \langle\psi|a_1^\dagger(\omega_1)a_2^\dagger(\omega_2)|0\rangle \langle 0|a_1(\omega_1)a_2(\omega_2)|\psi\rangle \right|^2 = \\ &= \iint d\omega_1 d\omega_2 |\langle 0|a_1(\omega_1)a_2(\omega_2)|\psi\rangle|^2 = \iint d\omega_1 d\omega_2 |\langle\omega_1, \omega_2|\psi\rangle|^2. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $|\psi_{\text{совп}}\rangle$  и учитывая условие нормировки вектора состояния  $\iint d\omega_1 d\omega_2 |F(\omega_1, \omega_2)|^2 = 1$ , а так же тот факт, что при отсутствии потерь  $|\phi(\omega)| = 1$ , получаем

$$P_c = \frac{1}{2} \left[ 1 - \Re \iint d\omega_1 d\omega_2 \{ F(\omega_1, \omega_2)\phi(\omega_2)F^*(\omega_2, \omega_1)\phi^*(\omega_1) \} \right]. \quad (3.15)$$

Наконец, пусть задержка по времени осуществляется оптическим элементом без дисперсии. Тогда  $\phi(\omega) = e^{i\omega\tau}$  и

$$P_c(\tau) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \Re \iint d\omega_1 d\omega_2 \left\{ F(\omega_1, \omega_2)F^*(\omega_2, \omega_1) e^{i(\omega_2 - \omega_1)\tau} \right\} \right]. \quad (3.16)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть состояние бифотонного поля имеет вид произведения двух однофотонных состояний

$$F(\omega_1, \omega_2) = \alpha(\omega_1)\beta(\omega_2), \quad (3.17)$$

где согласно условию нормировки  $\int d\omega |\alpha(\omega)|^2 = \int d\omega |\beta(\omega)|^2 = 1$ . Тогда в случае нулевой задержки формула (3.16) принимает вид

$$P_c(0) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left| \int d\omega \alpha(\omega) \beta^*(\omega) \right|^2 \right]. \quad (3.18)$$

Отсюда видно, что скорость счёта совпадений обращается в нуль, если два фотона имеют одинаковый спектр, т.е. когда  $\alpha(\omega) = \beta(\omega)$ . Чем меньше фотоны похожи друг на друга, тем меньше глубина провала. В предельном случае ортогональных состояний, когда  $\int d\omega \alpha(\omega) \beta^*(\omega) = 0$ , эффект антикорреляции пропадает.

В более общем случае, состояния бифотонного поля можно записать в виде разложения Шмидта:

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \alpha_n(\omega_1) \beta_n(\omega_2). \quad (3.19)$$

Тогда будем иметь

$$P_c(0) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \Re \sum_{n,m} \sqrt{\lambda_n \lambda_m} \int d\omega_1 \alpha_n(\omega_1) \beta_m^*(\omega_1) \int d\omega_2 \alpha_m^*(\omega_2) \beta_n(\omega_2) \right]. \quad (3.20)$$

Если моды Шмидта сигнального и холостого полей одинаковы, т.е.  $\alpha_n(\omega) = \beta_n(\omega)$ , то в силу ортонормированности базиса Шмидта имеем

$$\int d\omega \alpha_n(\omega) \beta_m^*(\omega) = \delta_{nm}, \quad (3.21)$$

откуда

$$P_c(0) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sum_n \lambda_n \right] = 0. \quad (3.22)$$

Если же моды Шмидта двух полей взаимортогональны, то эффект антикорреляции пропадает. Таким образом, для наблюдения двухфотонной интерференции не требуется, чтобы каждая мода на входе находилась в чистом состоянии. Достаточно того, чтобы общее состояние двух мод было чистым и, в общем случае, перепутанным по частоте, а функции Шмидта у двух мод были одинаковыми.

Наконец, рассмотрим бифотонное поле с сильной частотной антикорреляцией

$$|\psi\rangle = \int d\nu F(\nu) a_1^\dagger(\omega_1 + \nu) a_2^\dagger(\omega_2 - \nu) |0\rangle. \quad (3.23)$$

В этом случае двойные интегралы превращаются в одинарные и формула (3.15) принимает вид

$$P_c = \frac{1}{2} \left[ 1 - \int d\nu |F(\nu)|^2 \Re \{ \phi(\omega_0 - \nu) \phi^*(\omega_0 + \nu) \} \right]. \quad (3.24)$$

Пусть опять задержка по времени осуществляется оптическим элементом без дисперсии, т.е.  $\phi(\omega) = e^{i\omega\tau}$ . Тогда

$$P_c(\tau) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \int d\nu |F(\nu)|^2 \cos(2\nu\tau) \right]. \quad (3.25)$$

Таким образом, форма провала, т.е. функция  $P_c(\tau) - P_c(\tau \gg \tau_{coh})$ , представляет собой перевернутый фурье-образ спектра мощности бифотонного поля, сжатый вдвое по временному аргументу  $\tau$ . Это означает, в частности, что ширина провала есть половина времени когерентности бифотонного поля. Если время когерентности мало (широкополосное поле), то интерферометр Хонга—Оу—Манделя становится удобным инструментом для измерения малых временных задержек, что использовалось в ряде экспериментов, связанных с измерением групповой скорости однофотонных импульсов в диэлектрической среде [27–30], и является основой квантовой когерентной томографии [31–33].

В заключение, важно отметить два момента. Во-первых, для наблюдения двухфотонной интерференции не обязательно использовать фотоны с одной поляризацией. Допустим, что в процессе СПР типа II рождаются пары фотонов с состоянием  $|HV\rangle$ . Поскольку при детектировании можно определить поляризацию фотона, а значит и его путь от источника до детектора, квантовая интерференция пропадает. Однако, если перед детекторами поставить поляризаторы, ориентированные под углом  $\pm 45^\circ$ , то информация об исходном состоянии поляризации стирается и квантовая интерференция восстанавливается [34]. Более того, в зависимости от взаимной ориентации этих поляризаторов можно наблюдать не только провал, но и пик в совпадениях фотоотсчётов. Это равносильно тому, что спектральная амплитуда в формуле (3.12) становится антисимметричной функцией, так что при сложении двухфотонных амплитуд знак  $-$  заменяется знаком  $+$ . Во-вторых, для наблюдения двухфотонной интерференции не обязательно, чтобы фотоны «падали» на светоделитель одновременно. Относительную задержку до светоделителя можно компенсировать задержкой после светоделителя так, чтобы двухфотонные амплитуды, отвечающие за совпадения фотоотсчётов, опять соответствовали неразличимым событиям [35].



## Литература

- [1] **Клышко, Д.Н.** Фотоны и нелинейная оптика / Д.Н. Клышко. — М.: Наука, 1980.
- [2] **Клышко, Д.Н.** Поперечная группировка фотонов и двухфотонные процессы в поле параметрического рассеяния света / Д.Н. Клышко // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 1313–1323.
- [3] **Belinsky, A.V.** Two-photon wave packets / A.V. Belinsky, D.N. Klyshko // Laser Physics. 1994. V.4, P. 663–689
- [4] **Дмитриев, В.Г.** Прикладная нелинейная оптика / В.Г. Дмитриев, Л.В. Тарасов. — М.: Физматлит, 2004.
- [5] **Бауместр, Д.** Физика квантовой информации / Д. Бауместр, А. Экерт, А. Цайлингер. — М.: Постмаркет, 2002.
- [6] **Клышко, Д.Н.** Когерентный распад фотонов в нелинейной среде / Д.Н. Клышко // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 6. С. 490–492.
- [7] **Ахманов, С.А.** Квантовые шумы в параметрических усилителях света / С.А. Ахманов, В.В. Фадеев, Р.В. Хохлов, О.Н. Чунаев // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 6. С. 575–578.
- [8] **Harris, S.E.** Observation of tunable optical parametric fluorescence / S.E. Harris, M.K. Oshman, R.L. Byer // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 18. P. 732–734.
- [9] **Magde, D.** Study in Ammonium Dihydrogen Phosphate of Spontaneous Parametric Interaction Tunable from 4400 to 16 000 Å / D. Magde, H. Mahr // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 18. P. 905–907.
- [10] **Зельдович, Б.Я.** Статистика поля при параметрической люминесценции / Б.Я. Зельдович, Д.Н. Клышко // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9. С. 69–72.
- [11] **Burnham, D.C.** Observation of simultaneousty in parametric production of optical photon pairs / D.C. Burnham, D.L.Weinberg // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 25. P. 84–87.

- 
- [12] **Rubin, М.Н.** Theory of two-photon entanglement in type-II optical parametric down-conversion // М.Н. Rubin, D.N. Klyshko, Y.H. Shih, A.V. Sergienko // Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 5122–5133.
- [13] **Гурзадян, Г.Г.** Нелинейно-оптические кристаллы. Свойства и применение в квантовой электронике / Г.Г. Гурзадян, В.Г. Дмитриев, Д.Н. Никогосян — М.: Радио и связь, 1991.
- [14] **Ou, Z.Y.** Parametric down-conversion with coherent pulse pumping and quantum interference between independent fields / Z.Y. Ou // Quantum Semiclass. Opt. 1997. V. 9. P. 599–614.
- [15] **Keller, Т.Е.** Theory of two-photon entanglement for spontaneous parametric down-conversion driven by a narrow pump pulse / Т.Е. Keller, М.Н. Rubin // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 1534–1541.
- [16] **Grice, W.P.** Spectral information and distinguishability in type-II down-conversion with a broadband pump / W.P. Grice, I.A. Walmsley // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 1627–1634.
- [17] **Grice, W.P.** Spectral distinguishability in ultrafast parametric down-conversion / W.P. Grice, R. Erdmann, I.A. Walmsley, D. Branning. // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. R2289–R2292.
- [18] **Grice, W.P.** Eliminating frequency and space-time correlations in multiphoton states / W. P. Grice, A. B. U'Ren, I. A. Walmsley // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 063815–7.
- [19] **Giovannetti, V.** Extended phase-matching conditions for improved entanglement generation / V. Giovannetti, L. Maccone, J.H. Shapiro, F.N.C. Wong // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. P. 043813–9.
- [20] **U'Ren, A. B.** Generation of Pure-State Single-Photon Wavepackets by Conditional Preparation Based on Spontaneous Parametric Downconversion // A.B. U'Ren, C. Silberhorn, K. Banaszek, I.A. Walmsley, R. Erdmann, W.P. Grice, M.G. Raymer / Laser Physics. 2005. V.15. P. 146–161.
- [21] **Mikhailova, Yu.M.** Biphoton wave packets in parametric down-conversion: Spectral and temporal structure and degree of entanglement / Yu.M. Mikhailova, P.A. Volkov, M.V. Fedorov // Phys. Rev. A. 2008. V. 78. P. 062327–17.
- [22] **Law, C.K.** Continuous Frequency Entanglement: Effective Finite Hilbert Space and Entropy Control / C.K. Law, I.A. Walmsley, J.H. Eberly // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 5304–5307.
- [23] **Brida, G.** Characterization of spectral entanglement of spontaneous parametric-down conversion biphotons in femtosecond pulsed regime / G. Brida, V. Caricato, M.V. Fedorov, M. Genovese, M. Gramegna, S.P. Kulik // Europhysics Letters. 2009. V. 87. P. 64003.

- 
- [24] **Клышко, Д.Н.** Об использовании вакуумных флуктуации в качестве репера яркости света / Д.Н. Клышко // Квантовая электроника. 1977. Т. 4. С.1056–1062.
- [25] **Hong, С.К.** Experimental realization of a localized one-photon state / С.К. Hong, L. Mandel // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 58–60.
- [26] **Хаус, Х.** Волны и поля в оптоэлектронике / Х. Хаус. — М.: Мир, 1988.
- [27] **Hong, С.К.** Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference / С.К. Hong, Z.Y. Ou, L. Mandel // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 2044–2046.
- [28] **Steinberg, А.М.** Dispersion cancellation in a measurement of the single-photon propagation velocity in glass / А.М. Steinberg, P.G. Kwiat, R.Y. Chiao // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 2421–2424.
- [29] **Steinberg, А.М.** Measurement of the single-photon tunneling time / А.М. Steinberg, P.G. Kwiat, R.Y. Chiao // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 708–711.
- [30] **Branning, D.** Simultaneous measurement of group and phase delay between two photons / D. Branning, A.L. Migdall, A.V. Sergienko // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. P. 063808–12.
- [31] **Abouraddy, А.Ф.** Quantum-optical coherence tomography with dispersion cancellation / А.Ф. Abouraddy, M.B. Nasr, B.E.A. Saleh, A.V. Sergienko, M.C. Teich // Phys. Rev. A. 2002. V. 65. P. 053817–6.
- [32] **Nasr, M.B.** Demonstration of Dispersion-Canceled Quantum-Optical Coherence Tomography / M.B. Nasr, B.E.A. Saleh, A.V. Sergienko, M.C. Teich // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 083601–4.
- [33] **Nasr, M.B.** Quantum optical coherence tomography of a biological sample / M.B. Nasr, D.P. Goode, N.Nguyen, G. Rong, L. Yang, B.M. Reinhard, B.E.A. Saleh, M.C. Teich // Optics Communications. 2009. V. 282. P. 1154–1159.
- [34] **Kwiat, P.G.** Observation of a «quantum eraser»: a revival of coherence in a two-photon interference experiment / P.G. Kwiat, A.M. Steinberg, R.Y. Chiao // Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. 7729–7739.
- [35] **Pittman, Т.В.** Can Two-Photon Interference be Considered the Interference of Two Photons? / Т.В. Pittman, D.V. Strekalov, A. Migdall, M.H. Rubin, A.V. Sergienko, Y.H. Shih // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 1917–1920.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>1</b>	<b>Спонтанное параметрическое рассеяние</b>	<b>3</b>
1.1.	Общие определения . . . . .	3
1.2.	Вектор состояния бифотонного поля. I. . . . .	7
1.3.	Частотно-угловой спектр . . . . .	9
1.4.	Вектор состояния бифотонного поля. II. . . . .	14
1.5.	Плотность потока фотонов и спектральная яркость . . . . .	16
1.6.	Скорость счёта фотонов . . . . .	17
1.7.	Вектор состояния бифотонного поля в случае импульсной на- качки . . . . .	18
1.8.	Разложение Шмидта . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Генерация однофотонных состояний</b>	<b>26</b>
2.1.	Однофотонный волновой пакет . . . . .	26
2.2.	Идеальный однофотонный источник . . . . .	27
2.3.	Условное приготовление однофотонных состояний в режиме СПР	28
<b>3</b>	<b>Двухфотонная интерференция</b>	<b>34</b>
3.1.	Эффект антикорреляции фотоотсчётов . . . . .	34
3.2.	Интерферометр Хонга—Оу—Манделя . . . . .	36
	<b>Литература</b>	<b>41</b>

**Калачёв** Алексей Алексеевич

СПОНТАННОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РАССЕЙЯНИЕ И ЗАДАЧИ  
КВАНТОВОЙ ИНФОРМАТИКИ

Учебно-методическое пособие