Изучение колебаний двух двойных связанных маятников

Курсовая работа

Образовательная программа «Прикладные физика и математика»

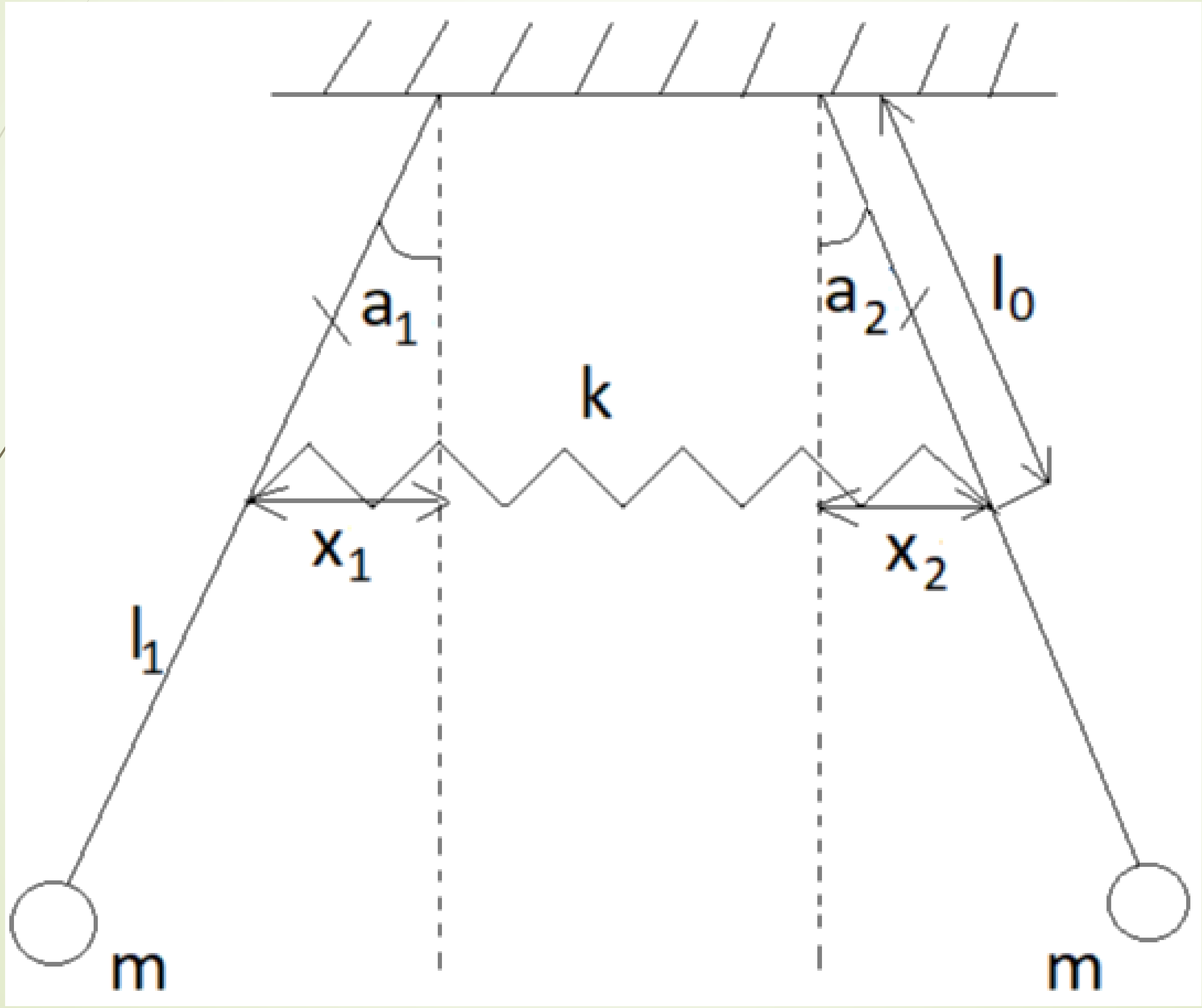
Студент 2 курса:

Лачихин Антон Геннадьевич

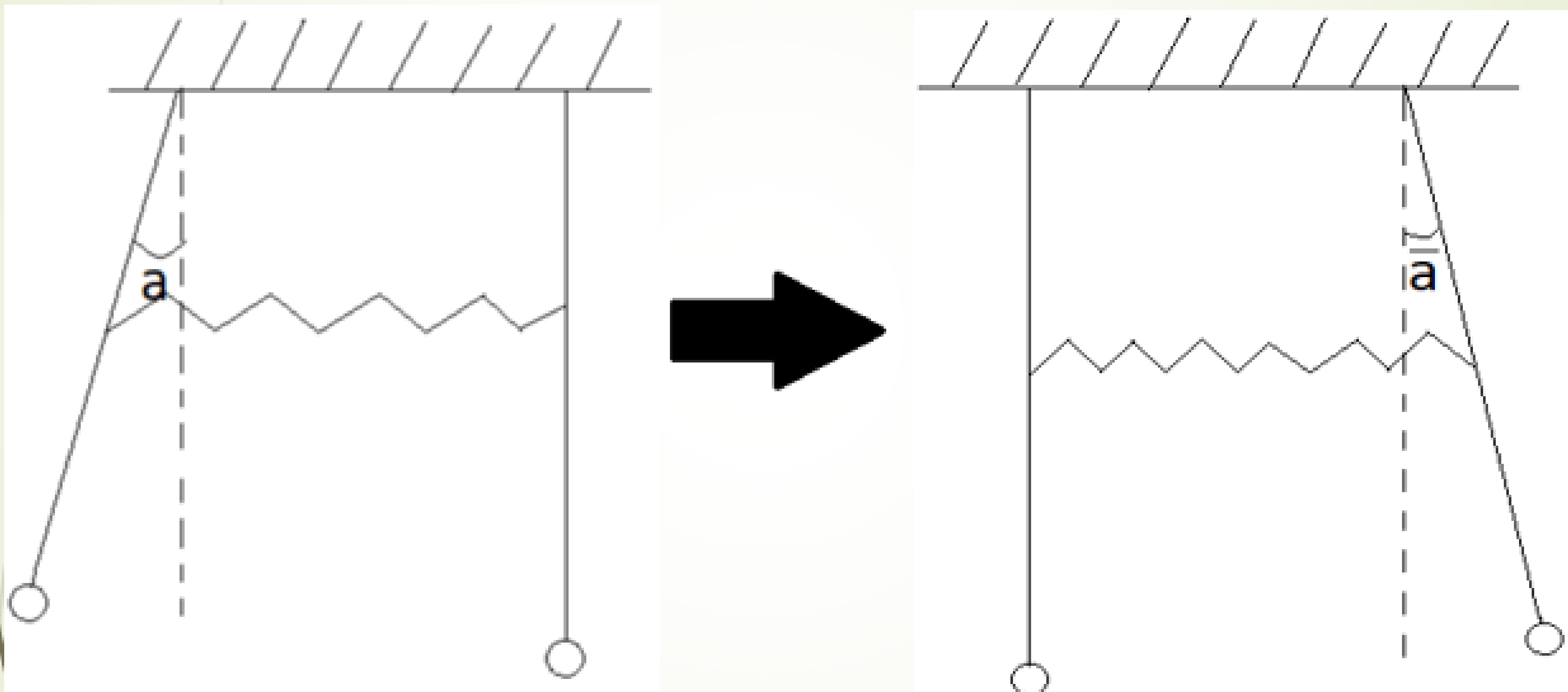
Научный руководитель:

к.ф.-м.н. Лосев Александр Сергеевич

Связанные маятники

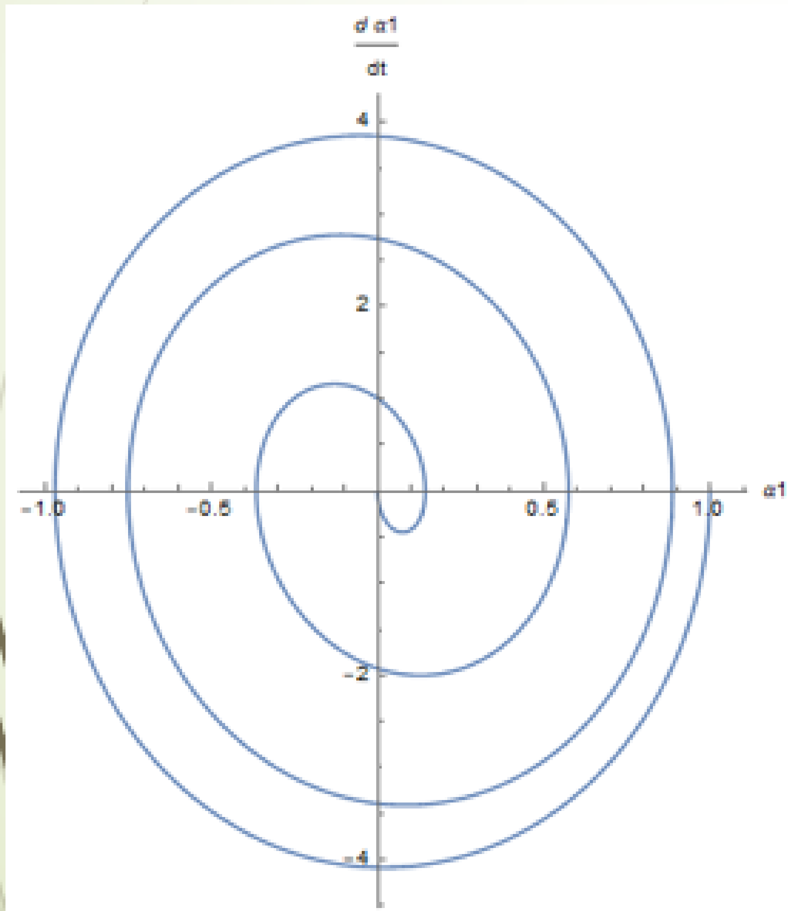


Эффект перекачки энергии

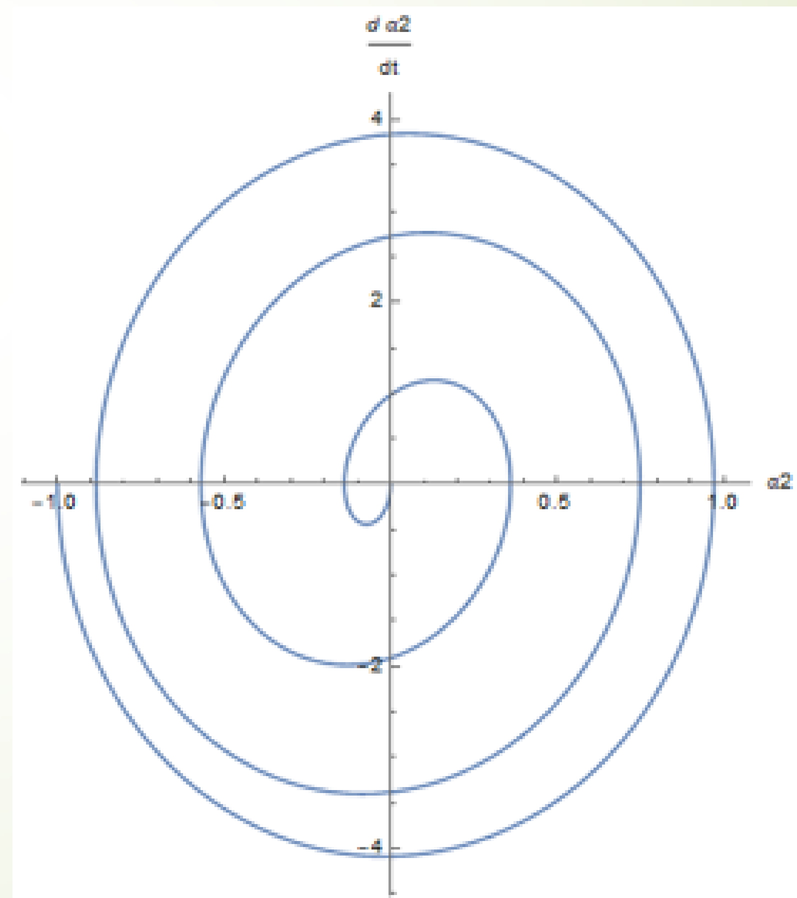


Фазовые портреты

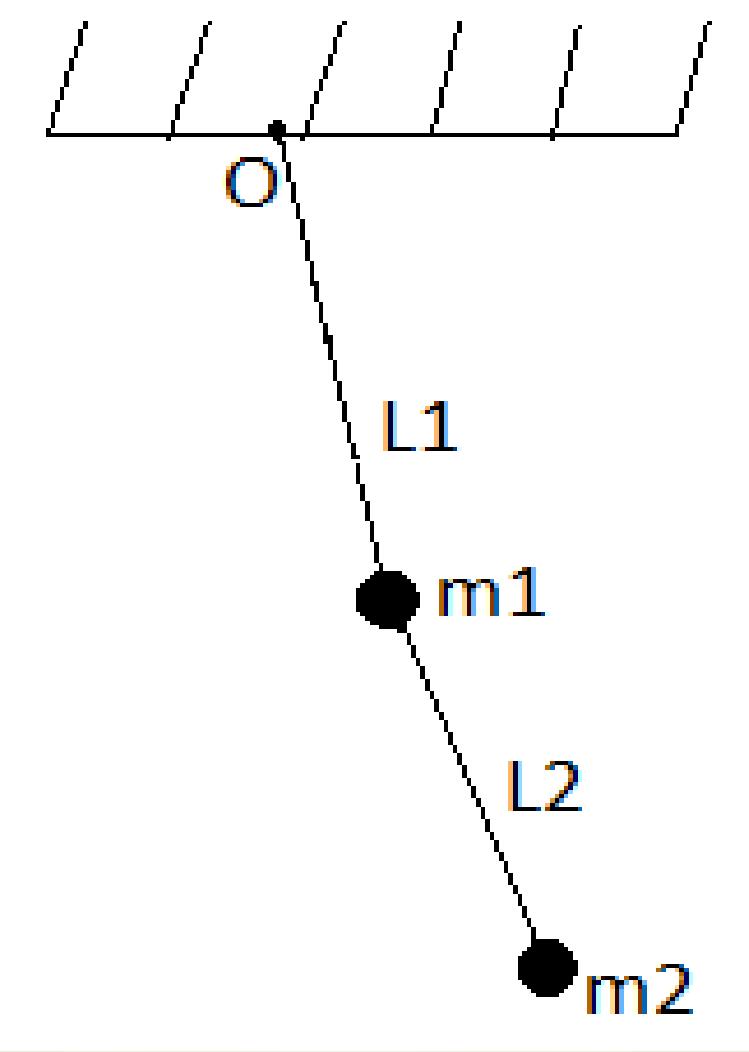
Отклоненный маятник
маятник (в начальный момент)



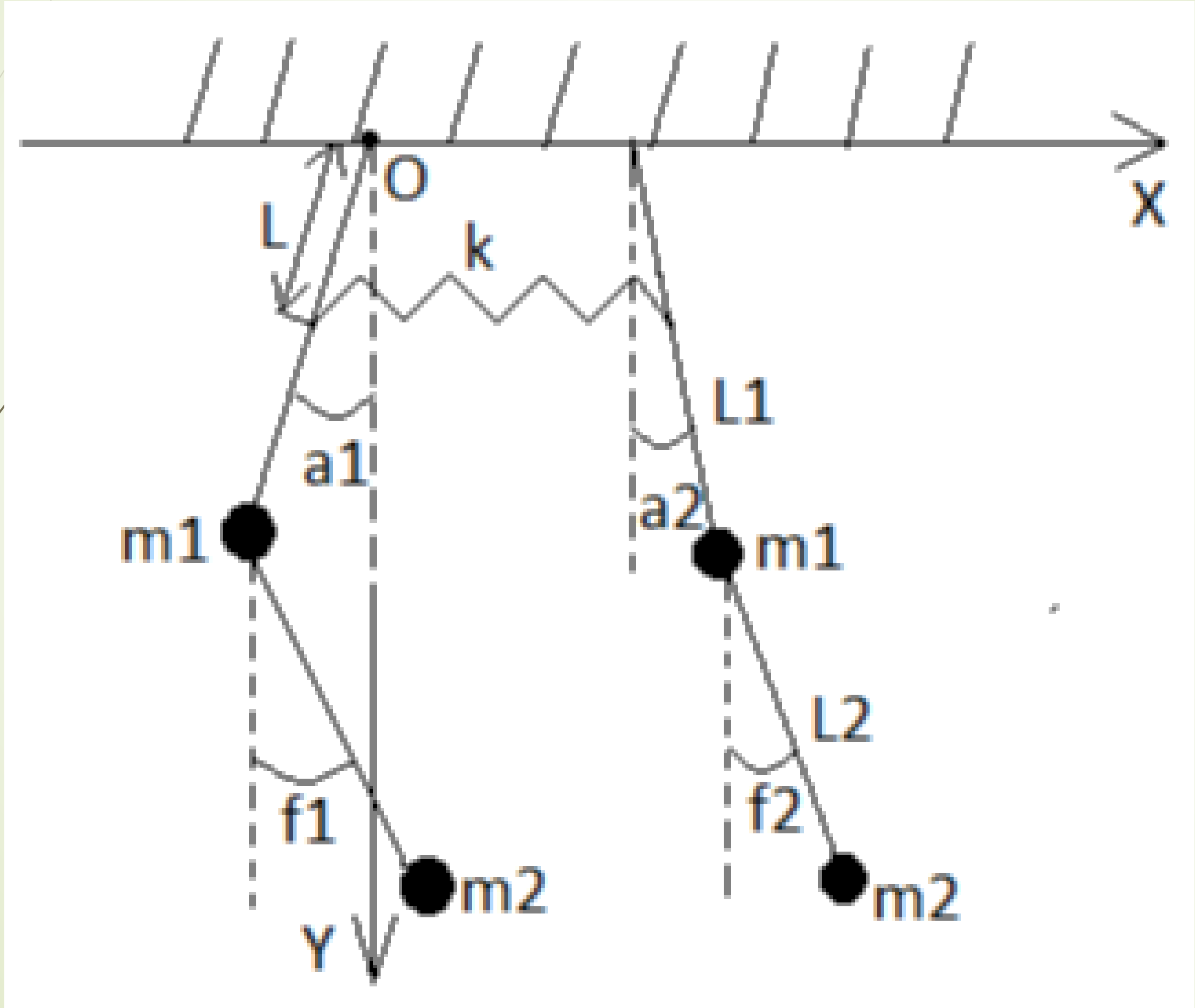
Неподвижный
(в начальный момент)



Двойной маятник



Исследуемая система



Уравнения Лагранжа

$$
\begin{cases}
m_2L_2^2\ddot{\varphi}_1 + m_2L_1L_2\ddot{\alpha}_1 + m_2gL_2\varphi_1 = 0 \\
m_2L_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2L_1L_2\ddot{\alpha}_2 + m_2gL_2\varphi_2 = 0 \\
(m_1 +\ m_2)L_1^2\ddot{\alpha}_1 + m_2L_1L_2\ddot{\varphi}_1 + (m_1 +\ m_2)gL_1\alpha_1 - kL^2(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \\
(m_1 +\ m_2)L_1^2\ddot{\alpha}_2 + m_2L_1L_2\ddot{\varphi}_2 + (m_1 +\ m_2)gL_1\alpha_2 + kL^2(\alpha_2 - \alpha_1) = 0
\end{cases} \quad (1)
$$

$$
\Psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \ (2)\ ,
$$

$$
K = \begin{pmatrix}
m_2L_2^2 & 0 & m_2L_1L_2 & 0 \\
0 & m_2L_2^2 & 0 & m_2L_1L_2 \\
m_2L_1L_2 & 0 & (m_1 +\ m_2)L_1^2 & 0 \\
0 & (m_1 +\ m_2)L_1^2 & 0 & (m_1 +\ m_2)L_1^2
\end{pmatrix} \ (3)
$$

$$M=\begin{pmatrix} 0 & m_2gL_2 & 0 & 0 \\ m_2gL_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (m_1+\ m_2)gL_1+kL^2 & -kL^2 \\ 0 & 0 & -kL^2 & (m_1+\ m_2)gL_1+kL^2 \end{pmatrix} (4)$$

Уравнения Лагранжа в матричной форме:

$$K\ddot{\Psi}+M\Psi=0\ (5)$$

Будем искать решение в виде:

$$\Psi_j(t)=Re\{A_je^{i\omega t}\}\ (6)$$

Собственные частоты

Набор собственных частот $\{\omega_j\}_{j=1}^{4}$ находится из уравнения:

$$det(M - \omega^2 K) = 0 \ (7)$$

Данное уравнение было решено, а из решения был получен набор собственных частот:

$$\left\{w \to \sqrt{2\,wg^2 - \sqrt{2}\,wg^2}\right\}$$

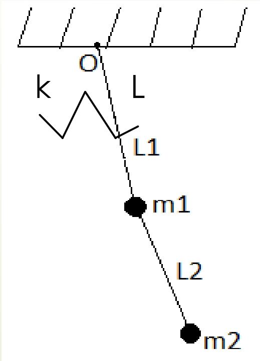
$$\left\{w \to \sqrt{2\,wg^2 + \sqrt{2}\,wg^2}\right\}$$

$$\left\{w \to \sqrt{2\,wg^2 + wk^2 - \sqrt{2\,wg^4 + 2\,wg^2\,wk^2 + wk^4}}\right\}$$

$$\left\{w \to \sqrt{2\,wg^2 + wk^2 + \sqrt{2\,wg^4 + 2\,wg^2\,wk^2 + wk^4}}\right\}$$

$$m_1 = m_2 = m,\ L_1 = L_2$$

$$\omega_g = \sqrt{\frac{g}{L_1}},\ \ \omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{L}{L_1}\right)}$$



Собственные векторы

Набор собственных векторов $\{A_j\}_{j=1}^{4}$ **находится из уравнений вида:**

$$\left(M - \omega_j^2 K\right) A_j = 0 \ (8)$$

После получения набора векторов составим матрицу А:

$$A = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4) \ (9)$$

Вид решения

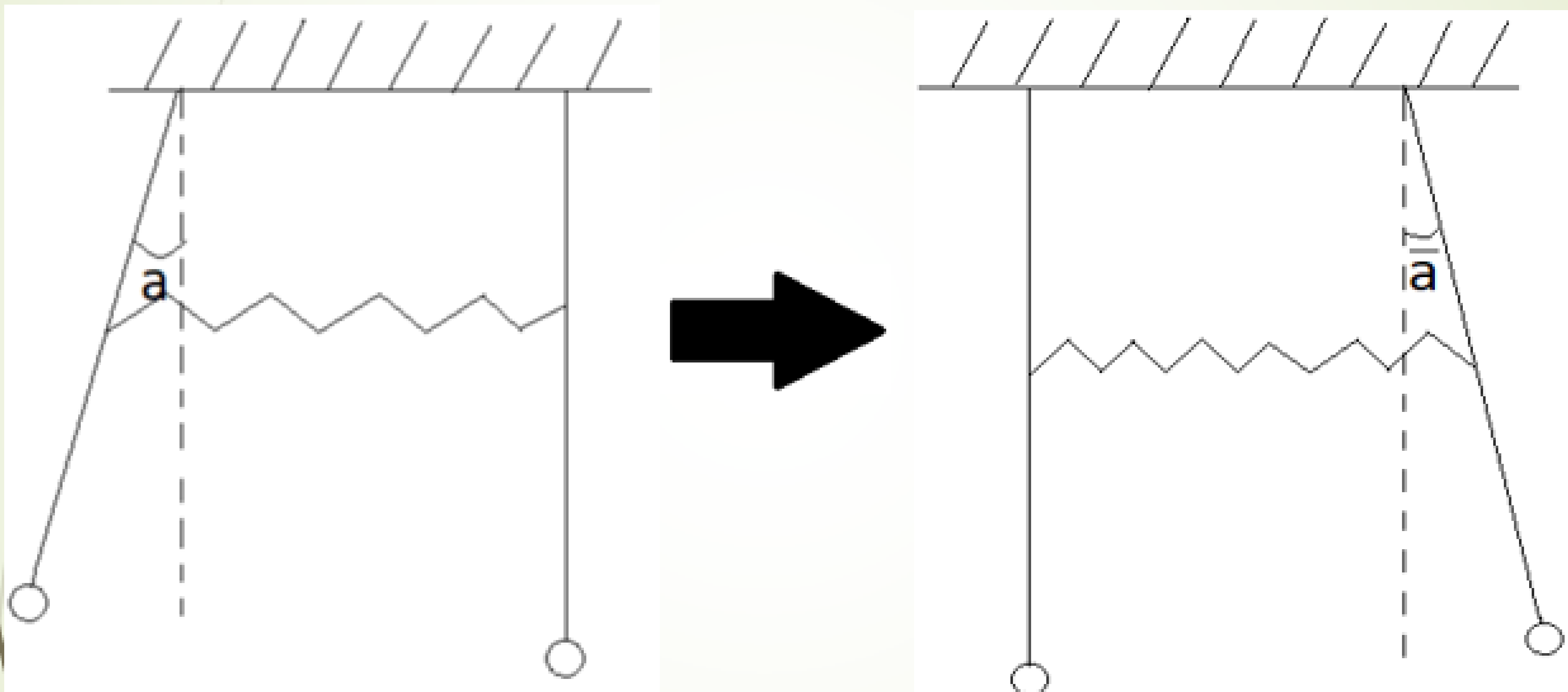
Решение имеет вид

$$\Psi_{\boldsymbol{j}}(t) = Re\left\{\sum_{k=1}^{4} C_k A_{jk} e^{i\omega_k t}\right\} \ (10),$$

где ω_k – **собственные частоты,** A_{jk} – **элементы матрицы А,**

C_k – **константы, определяемые из начальных условий (в общем случае - комплексные).**

Эффект перекачки энергии



Исследуемая система