

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего образования
Санкт-Петербургский государственный университет

КУРСОВАЯ РАБОТА

Оптическая мультиплексная голография

Студента 3 курса, 319 группы
Зинатуллина Эдуарда Рустемовича
Направление "Физика"

Научный руководитель
д.ф.-м.н. профессор Голубев Юрий Михайлович

Рецензент
д.ф.-м.н. профессор Соколов Иван Вадимович

Санкт-Петербург
2017

Содержание

1	Введение	3
2	Запись голограммы	4
3	Дифракция поля на решётке объемной голограммы	4
4	Дифракция плоской линейно поляризованной волны на решётке объемной голограммы	6
5	Фурье спектр дифрагированного поля	7
6	Запись и восстановление плоской линейно поляризованной волны	8
7	Мультиплексирование по углам	10
8	Мультиплексирование по длинам волн	11
9	Заключение	13
A	Функция Грина для уравнения Гельмгольца	14

1 Введение

По определению, голография – способ записи и последующего восстановления некоторой сигнальной волны, позволяющий зарегистрировать не только интенсивность, но и её фазу [1]. При регистрации голограммы на светочувствительную среду отпечатывается интерференционная структура, образованная сигнальной волной и когерентной с ней опорной волной, при этом происходит изменение показателя преломления среды – в ней образуется своего рода дифракционная решётка. Если после записи осветить такую среду опорной волной, то за счёт дифракции света будет восстановлена сигнальная волна. В зависимости от того, изменяется реальная или мнимая часть показателя преломления при регистрации, разделяют амплитудную и фазовую записи.

Если в направлении оптической оси системы в среде уместится один интерференционный максимум, то голограмма называется тонкой, а если более одного, то объёмной. В случае объёмной голографии, выбирая различные направления опорной волны или различные длины волн, можно отпечатать на среду несколько интерференционных структур, соответствующих разным сигнальным волнам, а затем восстанавливать эти волны независимо друг от друга. Такая регистрация нескольких различных сигнальных волн внутри одной голографической пластинки называется мультиплексированием.

В настоящее время технику мультиплексирования широко используют в голографических информационных накопителях [2]. Они имеют ряд преимуществ над классическими: высокая скорость записи и считывания, долгий срок хранения данных, высокая помехозащищённость, возможность одновременного считывания и чтения данных. Кроме того, мультиплексирование голограмм позволяет значительно повысить плотность записи, что позволяет сделать носители более компактными [3].

Отметим, что техника мультиплексирования может быть обобщена на случай "квантовых голограмм", когда происходит отпечатывание пространственно-временных квантово-статистических свойств излучения на среду с его последующим восстановлением – запись и считывание "квантового изображения" [4]. Можно сказать, что это предельный случай голографии, так как он подразумевает подавление квантовых шумов и высокую верность воспроизведения зарегистрированного объекта. Как и в случае классической голограммы мультиплексирование может вестись, как по углам [5], так и по частотам [6]. Кроме того, мультиплексирование можно проводить и по другим, квантовым степеням свободы: например, выбирая для записи различные атомные уровни [7] или спиновые волны среды [8]. Такие способы регистрации квантовых полей на одном носителе находят свое отражение в разрабатываемых сегодня протоколах квантовой памяти [9, 10, 11].

Это позволяет нам утверждать, что оптическая мультиплексная голография является актуальной темой исследования и с точки зрения сегодняшнего дня, – создание эффективных голографических информационных накопителей, необходимых для работы оптического компьютера [12], – и с точки зрения завтрашнего дня, – разработка протоколов квантовой памяти и создание с их помощью квантового компьютера [13].

2 Запись голограммы

В настоящей работе мы будем рассматривать случай, когда объёмная голограмма регистрируется как модуляция показателя преломления среды, полученная в результате интерференции сигнального $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ и опорного $\mathbf{E}_r(\mathbf{r})$ полей с волновыми векторами \mathbf{k}_s и \mathbf{k}_r соответственно: диэлектрическая проницаемость среды изменяется пропорционально локальной интенсивности их суперпозиции. В момент регистрации эта интенсивность может быть записана в виде следующего выражения

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) &\sim (\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_r(\mathbf{r}))(\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_r(\mathbf{r}))^* = \\ &= |\mathbf{E}_s(\mathbf{r})|^2 + |\mathbf{E}_r(\mathbf{r})|^2 + |\mathbf{E}_s(\mathbf{r})| |\mathbf{E}_r(\mathbf{r})| (e^{i(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r}} + e^{-i(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r}}) = \\ &= |\mathbf{E}_s(\mathbf{r})|^2 + |\mathbf{E}_r(\mathbf{r})|^2 + 2|\mathbf{E}_s(\mathbf{r})| |\mathbf{E}_r(\mathbf{r})| \cos(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введем несущий волновой вектор решётки $\mathbf{K}_g = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_r$, тогда диэлектрическую проницаемость можно выразить как [14]

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{K}_g \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.2)$$

где ε_0 – диэлектрическая проницаемость среды до записи, а $\varepsilon_1(\mathbf{r})$ – модуляция диэлектрической проницаемости среды, вызванная интерференцией падающих на неё волн

$$\varepsilon_1(\mathbf{r}) \sim \frac{2|\mathbf{E}_s(\mathbf{r})| |\mathbf{E}_r(\mathbf{r})| \cos \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{E}_s(\mathbf{r})|^2 + |\mathbf{E}_r(\mathbf{r})|^2}. \quad (2.3)$$

3 Дифракция поля на решётке объёмной голограммы

Будем предполагать, что модуляция показателя преломления среды (2.2) слабая, то есть

$$\varepsilon_0 \gg |\varepsilon_1(\mathbf{r})|. \quad (3.4)$$

Более того, мы будем считать, что она является узкополосной и её изменение существенно ограничено на длине пространственного периода решётки \mathbf{K}_g и выполняется следующее неравенство [15]

$$\nabla \varepsilon_1(\mathbf{r}) \ll \mathbf{K}_g \varepsilon_1(\mathbf{r}). \quad (3.5)$$

Пусть пробное поле \mathbf{E}_p с частотой ω_p освещает среду, на которой записана голограмма. В результате дифракции на выходе из среды будет восстановлено сигнальное поле на той же частоте, которое мы обозначим как \mathbf{E}_d . Нашей задачей будет найти поле \mathbf{E}_d и сравнить его с записанным полем \mathbf{E}_s . Для этого выпишем систему уравнений Максвелла в отсутствии зарядов:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= i\omega_p \mathbf{B}, & \nabla \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega_p \mathbf{D}, & \nabla \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_d$ – полное электрическое поле; $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ – диэлектрическая индукция; \mathbf{H} – магнитное поле; $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ – магнитная индукция и μ – магнитная проницаемость, в дальнейшем полагаемая равной магнитной постоянной μ_0 .

Из двух уравнений системы (3.6) с нетривиальной правой частью получим

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mu\varepsilon\omega_p^2\mathbf{E}. \quad (3.7)$$

Раскроем двойное векторное произведение:

$$\nabla(\nabla\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = \mu\varepsilon\omega_p^2\mathbf{E}. \quad (3.8)$$

Далее, используя закон Гаусса и неравенство (3.4), найдём $\nabla\mathbf{E}$:

$$\nabla\mathbf{E} = -\frac{\nabla\varepsilon\mathbf{E}}{\varepsilon} \approx -\frac{\nabla\varepsilon\mathbf{E}}{\varepsilon_0}. \quad (3.9)$$

Для градиента диэлектрической проницаемости имеем следующее выражение:

$$\nabla\varepsilon(\mathbf{r}) = \nabla(\varepsilon_1(\mathbf{r})e^{i\mathbf{K}_g\mathbf{r}}) = e^{i\mathbf{K}_g\mathbf{r}}\nabla\varepsilon_1(\mathbf{r}) + i\varepsilon_1(\mathbf{r})e^{i\mathbf{K}_g\mathbf{r}}\mathbf{K}_g. \quad (3.10)$$

Так как мы предположили, что модуляция является узкополосной, то первым слагаемым мы можем пренебречь. Это позволяет записать (3.9) в упрощённом явном виде:

$$\nabla\mathbf{E} \approx -i\frac{\varepsilon_1(\mathbf{r})e^{i\mathbf{K}_g\mathbf{r}}(\mathbf{K}_g\mathbf{E})}{\varepsilon_0}. \quad (3.11)$$

Волновое уравнение для электрического поля в случае объёмной голограммы получается из (3.8) после подстановки (3.11), при этом мы используем, что $k_p = 2\pi/\lambda_p = \omega_p\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$:

$$\nabla^2\mathbf{E} + k_p^2\mathbf{E} = -i\nabla\left(\frac{(\mathbf{K}_g\mathbf{E})\varepsilon_1(\mathbf{r})e^{i\mathbf{K}_g\mathbf{r}}}{\varepsilon_0}\right) - \frac{k_p^2}{\varepsilon_0}e^{i\mathbf{K}_g\mathbf{r}}\mathbf{E}. \quad (3.12)$$

Задействовав приближение узкополосной модуляции (3.4), упростим первое слагаемое в правой части:

$$-i\nabla\left(\frac{(\mathbf{K}_g\mathbf{E})\varepsilon_1(\mathbf{r})e^{i\mathbf{K}_g\mathbf{r}}}{\varepsilon_0}\right) \approx -i\frac{(\mathbf{K}_g\nabla\mathbf{E} + i(\mathbf{K}_g\mathbf{E})\mathbf{K}_g)\varepsilon_1(\mathbf{r})e^{i\mathbf{K}_g\mathbf{r}}}{\varepsilon_0}. \quad (3.13)$$

Введём оператор $U(\mathbf{r})$, описывающий правую часть уравнения (3.12) с учётом выражения (3.13):

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_1(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}e^{i\mathbf{K}_g\mathbf{r}}(-i\mathbf{K}_g\nabla + \mathbf{K}_g\mathbf{K}_g + k_p^2), \quad (3.14)$$

тогда наше волновое уравнение примет вид:

$$(\nabla^2 + k_p^2)\mathbf{E} = U(\mathbf{r})\mathbf{E}. \quad (3.15)$$

В общем случае это уравнение не имеет решения в явном виде. Однако мы можем воспользоваться тем, что модуляция показателя преломления слабая, и

решить его методом последовательных приближений, организовав следующую итерационную процедуру

$$(\nabla^2 + k_p^2)\mathbf{E}^{(n+1)} = U(\mathbf{r})\mathbf{E}^{(n)}, \quad (3.16)$$

где $\mathbf{E}^{(n)}$ – поправки n -го порядка к решению, а в качестве нулевого приближения берётся опорное поле \mathbf{E}_p . Решение записывается в виде ряда:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}^{(n)}.$$

Пусть $G(\mathbf{r})$ – функция Грина дифференциального уравнения

$$(\nabla^2 + k_p^2)\mathbf{E} = \delta(\mathbf{r}), \quad (3.17)$$

тогда решение уравнения (3.16) – это интеграл, взятый по объёму V , занимаемому голографической средой,

$$\mathbf{E}^{(n+1)}(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (3.18)$$

Возьмём поле \mathbf{E}_d в качестве решения первого порядка:

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \mathbf{E}_p(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (3.19)$$

Отметим, что следующие порядки мы не учитываем ввиду их малости.

4 Дифракция плоской линейно поляризованной волны на решётке объемной голограммы

Не снижая общности рассмотрения, проанализируем важный частный случай, когда пробное поле \mathbf{E}_p является плоской волной, линейно поляризованной в направлении \mathbf{e}_p

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = E_p(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}_p\mathbf{r}}\mathbf{e}_p \quad (\mathbf{k}_p \perp \mathbf{e}_p). \quad (4.20)$$

Заметим, что любую волну с произвольным волновым фронтом можно представить как суперпозицию плоских волн.

Функция Грина для уравнения Гельмгольца в случае свободного пространства может быть представлена выражением

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_p|\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}|}. \quad (4.21)$$

Подставив (4.21) и (4.20) в (3.19), получим для дифрагированного поля

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}) = \int_V \frac{e^{ik_p|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\varepsilon_1(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} e^{i\mathbf{K}_g\mathbf{r}'} (-i\mathbf{K}_g\nabla + \mathbf{K}_g\mathbf{K}_g + k^2) E_p(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}_p\mathbf{r}'} \mathbf{e}_p d^3\mathbf{r}'. \quad (4.22)$$

Так как $E_d(\mathbf{r})$ изменяется мало на пространственном периоде \mathbf{k}_p и мы можем считать, что $k_p E_d(\mathbf{r}) \gg |\nabla E_d(\mathbf{r})|$, мы пренебрежём в подынтегральном выражении членом с $\nabla E_d(\mathbf{r})$ и получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \frac{e^{ik_p|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \varepsilon_1(\mathbf{r}') E_p(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{K}_g+\mathbf{k}_p)\mathbf{r}'} ((\mathbf{K}_g \mathbf{e}_p) \mathbf{k}_p + \mathbf{K}_g (\mathbf{K}_g \mathbf{e}_p) + k^2 \mathbf{e}_p) d^3 \mathbf{r}' = \\ &= \mathbf{s}(\mathbf{k}_p) \int_V \frac{e^{ik_p|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \varepsilon_1(\mathbf{r}') E_p(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{K}_g+\mathbf{k}_p)\mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}', \end{aligned} \quad (4.23)$$

где мы ввели обозначение

$$\mathbf{s}(\mathbf{k}_p) = \frac{(\mathbf{K}_g \mathbf{e}_p)(\mathbf{K}_g + \mathbf{k}_p) + k^2 \mathbf{e}_p}{\varepsilon_0}. \quad (4.24)$$

Полученный результат имеет интуитивно понятную физическую интерпретацию: каждый бесконечно малый элемент голограммы является точечным источником с амплитудой излучения, пропорциональной амплитуде падающего на него поля, умноженной на значение показателя преломления в этом элементе, а дифрагированное поле выражается суммой полей от всех таких элементарных источников.

5 Фурье спектр дифрагированного поля

Для дальнейшего анализа разложим дифрагированное поле по углам, задающим направление его волнового вектора. Представим функцию Грина в виде

$$\frac{e^{ik_p|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{ik_p}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \varphi e^{-ik\mathbf{h}(\varphi,\theta)(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}, \quad (5.25)$$

где

$$\mathbf{h}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Подставив (5.25) в (4.23) и изменив порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d(\mathbf{r}) &= \frac{ik_p \mathbf{s}(\mathbf{k}_p)}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \varphi e^{-ik_p \mathbf{h}(\varphi,\theta) \mathbf{r}} \times \\ &\quad \times \int_V \varepsilon_1(\mathbf{r}') E_p(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{K}_g+\mathbf{k}_p)\mathbf{r}'} e^{-ik_p \mathbf{h}(\varphi,\theta) \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Введем обозначение для интеграла по объему, стоящего в правой части полученного выражения,

$$A_d(\varphi, \theta) = \int_V \varepsilon_1(\mathbf{r}') E_p(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{K}_g+\mathbf{k}_p)\mathbf{r}'} e^{-ik_p \mathbf{h}(\varphi,\theta) \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}'. \quad (5.28)$$

$A_d(\varphi, \theta)$ описывает поведение амплитуды дифрагированной волны в зависимости от направления её распространения.

Таким образом, окончательное выражение для дифрагированного поля, разложенного по направляющим углам, принимает вид

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}) = \frac{ik_p \mathbf{s}(\mathbf{k}_p)}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \varphi e^{-ik_p \mathbf{h}(\varphi,\theta) \mathbf{r}} A_d(\varphi, \theta). \quad (5.29)$$

6 Запись и восстановление плоской линейно поляризованной волны

По аналогии с рассмотренным выше случаем будем считать, что сигнальная волна также является плоской волной, линейно поляризованной в том же направлении что и опорная. Выберем координатную систему так, чтобы ось \mathbf{Z} была направлена вдоль оптической оси, а направление оси \mathbf{Y} совпадало с направлением вектора поляризации \mathbf{e}_p падающих волн ($\mathbf{e}_p = \mathbf{e}_y$). Размеры голографической пластинки задаются размерами D_x , D_y и D_z по осям \mathbf{X} , \mathbf{Y} и \mathbf{Z} соответственно, а её геометрический центр помещён в начало координат. Сигнальную волну \mathbf{E}_s направим под углом θ_s к оси \mathbf{Z} , а опорную волну \mathbf{E}_r – под углом θ_r (см. Рис.1 а), тогда

$$\mathbf{E}_s = E_s e^{i\mathbf{k}_s \mathbf{r}} \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{E}_r = E_r e^{i\mathbf{k}_r \mathbf{r}} \mathbf{e}_y. \quad (6.30)$$

и их волновые векторы выражаются как:

$$\mathbf{k}_s = k \begin{pmatrix} \sin \theta_s \\ 0 \\ \cos \theta_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_r = k \begin{pmatrix} -\sin \theta_r \\ 0 \\ \cos \theta_r \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

Отсюда находим несущий волновой вектор решётки

$$\mathbf{K}_g = k \begin{pmatrix} \sin \theta_s + \sin \theta_r \\ 0 \\ \cos \theta_s - \cos \theta_r \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

Так как амплитуды опорной и сигнальной волн при записи не зависят от положения в пространстве \mathbf{r} , то и функция модуляции показателя преломления тоже не зависит от \mathbf{r} , то есть $\varepsilon_1(\mathbf{r}) = \varepsilon_1$.

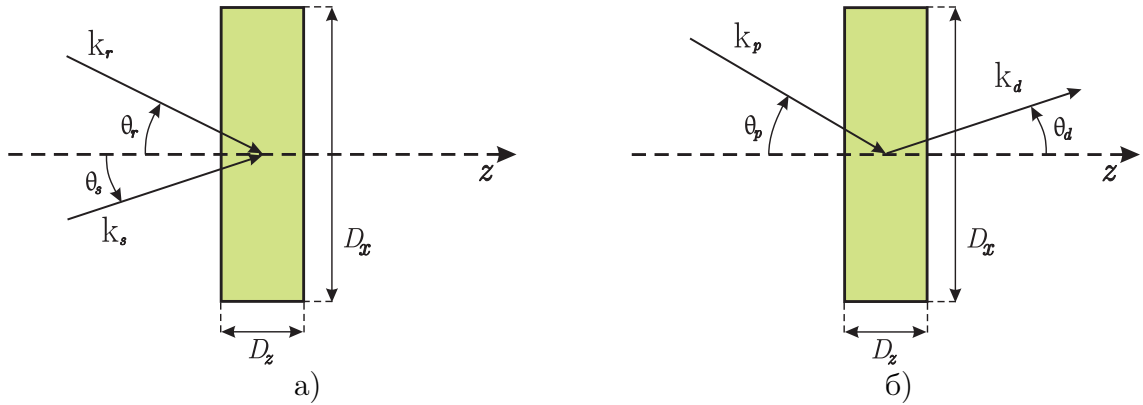


Рис. 1: а) запись сигнального поля \mathbf{E}_s в присутствии опорного поля \mathbf{E}_r на голографическую пластинку; б) восстановление сигнального поля \mathbf{E}_d в результате дифракции пробного поля \mathbf{E}_p .

При восстановлении сигнального поля \mathbf{E}_d направим пробную волну \mathbf{E}_p под углом θ_p (см. Рис.1 б). При этом мы будем считать, что она имеет частоту ω_p ,

отличную от частоты опорной волны при записи:

$$\mathbf{E}_p = E_p e^{i\mathbf{k}_p \mathbf{r}} \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{k}_p = k_p \begin{pmatrix} -\sin \theta_p \\ 0 \\ \cos \theta_p \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Подставив (6.32) и (6.33) в (6.35), получаем выражение для $A_d(\varphi, \theta)$:

$$A_d(\varphi, \theta) = \varepsilon_1 E_p D_x D_y D_z \operatorname{sinc}(k D_x (\sin \theta_s + \sin \theta_r) + k_p D_x (-\sin \theta_p - \cos \varphi \sin \theta)) \times \\ \times \operatorname{sinc}(-k_p D_y \sin \varphi \sin \theta) \operatorname{sinc}(k D_z (\cos \theta_s - \cos \theta_r) + k_p D_z (\cos \theta_p - \cos \theta)). \quad (6.34)$$

В дальнейшем нас будет интересовать задача мультиплексирования, то есть записи на одну среду нескольких голограмм. Мы рассмотрим случай, когда регистрируются волны, падающие на среду под различными углами, а также случай когда они падают в одном направлении, но при этом имеют различные частоты. Поскольку мультиплексирование подразумевает запись интерференционных максимумов, проанализируем выражение (6.34) и заметим, что его максимум достигается при $\varphi = 0$. Добавим также, что при увеличении размера пластинки D_y его ширина будет уменьшаться (Рис.2) и в пределе при $D_y \rightarrow \infty$ он стремится к дельта функции.

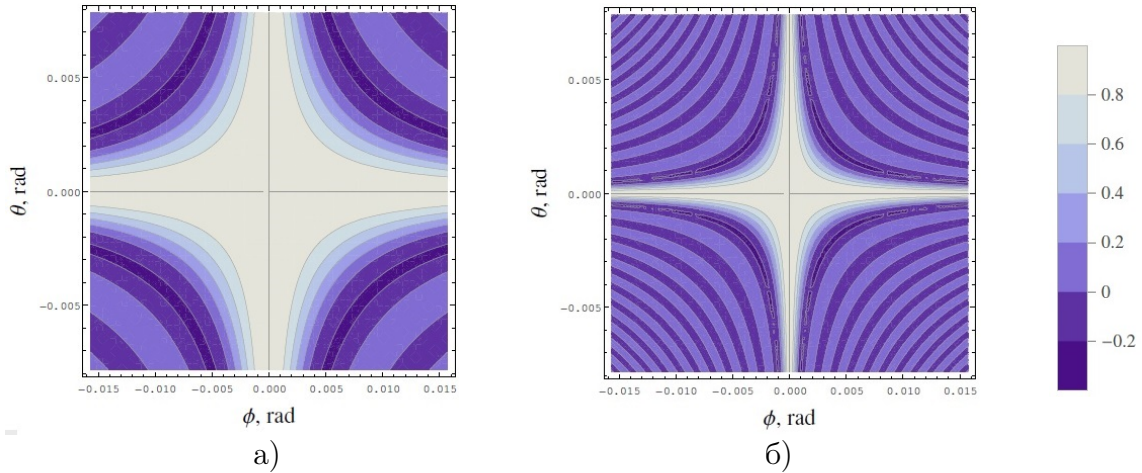


Рис. 2: график функции $\operatorname{sinc}(-k_p D_y \sin \varphi \sin \theta)$ для $\lambda = 555$ нм при: а) $D_y = 1$ см, б) $D_y = 5$ см.

Условие $\varphi = 0$ означает, что в дальнейшем мы будем рассматривать задачу в плоскости \mathbf{XZ} . Это позволяет переписать выражение (6.34) как

$$A_{d,\varphi=0}(\theta) = \varepsilon_1 E_p D_x D_y D_z \operatorname{sinc}(k D_x (\sin \theta_s + \sin \theta_r) + k_p D_x (-\sin \theta_p - \sin \theta)) \times \\ \times \operatorname{sinc}(k D_z (\cos \theta_s - \cos \theta_r) + k_p D_z (\cos \theta_p - \cos \theta)). \quad (6.35)$$

Оценим ширину пика, получаемого, когда опорная волна при записи совпадает с пробной волной при считывании. Получим для $A_{d,\varphi=0}(\theta)$

$$A_{d,\varphi=0}(\theta) = \varepsilon_1 E_p D_x D_y D_z \operatorname{sinc}(k D_x (\sin \theta_s - \sin \theta)) \operatorname{sinc}(k D_z (\cos \theta_s - \cos \theta)). \quad (6.36)$$

Так как интенсивность излучения пропорциональна квадрату $A_{d,\varphi=0}$, из графика Рис.3 видно, что при данных условиях полуширина пика составляет менее одной тысячной радиана и с высокой точностью восстанавливается направление сигнальной волны.

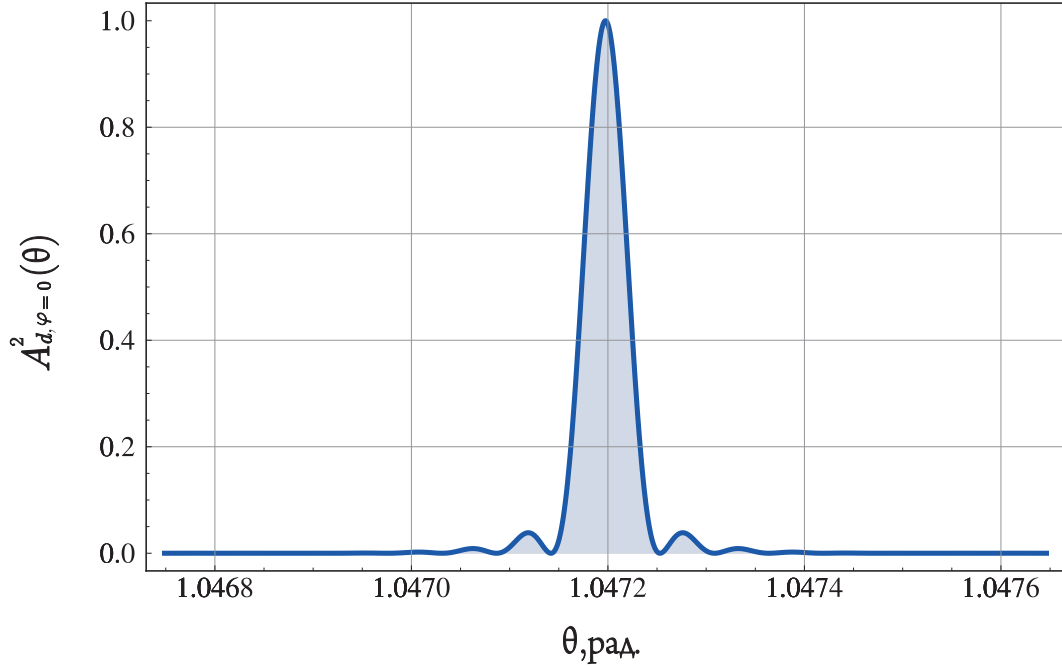


Рис. 3: $A_{d,\varphi=0}^2(\theta)$ при следующих параметрах:
 $\lambda = 555$ нм, $D_x = 10$ мм, $D_z = 1$ мм.

7 Мультиплексирование по углам

Рассмотрим мультиплексирование по углам. Положим частоту пробной волны при восстановлении сигнального поля равной частоте опорной волны при записи. Мы хотим получить записанную сигнальную волну, поэтому фиксируем угол наблюдения $\theta = \theta_s$. Проанализируем зависимость интенсивности восстановленной волны от угла падения пробной волны θ_p

$$A_{d,\varphi=0}(\theta_p) = \varepsilon_1 E_p D_x D_y D_z \operatorname{sinc}(kD_x(\sin \theta_p - \sin \theta_r)) \operatorname{sinc}(kD_z(\cos \theta_p - \cos \theta_r)). \quad (7.37)$$

Записанное выражение сходно с выражением из предыдущего пункта, поэтому мы имеем аналогичные результаты: реконструкция волны будет иметь место при углах пробной волны θ_p незначительно отличающихся от угла опорной волны θ_r .

Теперь перейдём к случаю, когда на одну пластинку записываются две сигнальные волны, распространяющиеся в одном направлении θ_s , с помощью опорных волн, падающих под разными углами θ_{r1} и θ_{r2} . В среде при этом будет возникать интерференционная картина, являющейся суммой интерференционных

картин, отвечающих записи каждой из волн. Отсюда спектр восстановленной волны будет представлять собой сумму двух членов, отвечающих соответственным волнам, то есть

$$A_{d,\varphi=0}(\theta_p) = \varepsilon_1 E_p D_x D_y D_z \left[\text{sinc}(kD_x(\sin \theta_p - \sin \theta_{r1})) \text{sinc}(kD_z(\cos \theta_p - \cos \theta_{r1})) + \text{sinc}(kD_x(\sin \theta_p - \sin \theta_{r2})) \text{sinc}(kD_z(\cos \theta_p - \cos \theta_{r2})) \right]. \quad (7.38)$$

Так как интенсивность поля зависит от квадрата $A_{d,\varphi=0}(\theta_p)$ будет возникать перекрёстный член, вносящий шум и искажающий графики. Его интенсивность падает с увеличением разницы между углами θ_{r1} и θ_{r2} и при достаточно большой разнице между углами его влиянием можно пренебречь.

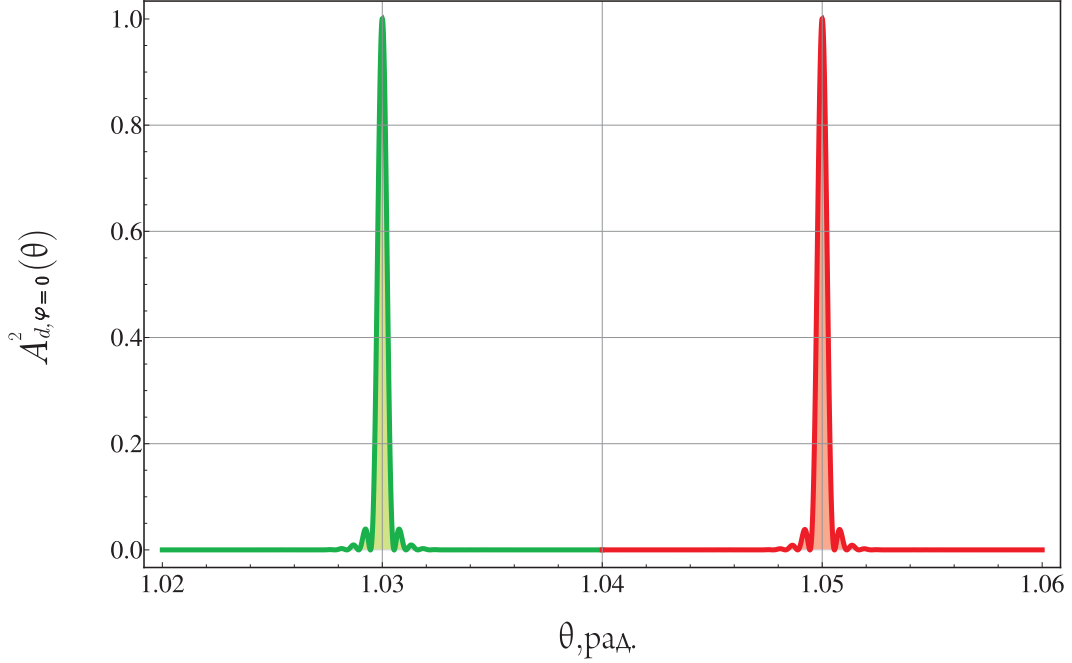


Рис. 4: $A_{d,\varphi=0}^2(\theta_p)$ при следующих параметрах: $\lambda = 555$ нм, $D_x = 1$ мм, $D_z = 0.1$ мм и углах $\theta_{r1} = 1.03$ и $\theta_{r2} = 1.05$.

Аналогичный результат получится и в случае, когда записываемые сигнальные волны имеют различные направления.

8 Мультиплексирование по длинам волн

Теперь рассмотрим мультиплексирование голограмм, записанных на различных длинах волн. Пусть у нас есть две сигнальные волны с одинаковым направлением θ_s и длинами волн λ_1 и λ_2 , записанные при одинаковом направлении опорной волны θ_r . В добавок выполняются условия на углы: $\theta_p = \theta_r$ и $\theta_s = \theta$. Интерференционная структура, отпечатанная в среде, будет представлять собой сумму интерференционных картин, отвечающих регистрации отдельных волн. Таким образом, спектр снова является суммой двух спектров.

Будем варьировать длину пробной волны, тогда

$$A_{d,\varphi=0}(\lambda) = \varepsilon_1 E_p D_x D_y D_z \left[\operatorname{sinc} \left(2\pi D_x \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1} \right) (\sin \theta_s + \sin \theta_r) \right) \operatorname{sinc} \left(2\pi D_z \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1} \right) (\cos \theta_s - \cos \theta_r) \right) + \operatorname{sinc} \left(2\pi D_x \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_2} \right) (\sin \theta_s + \sin \theta_r) \right) \operatorname{sinc} \left(2\pi D_z \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_2} \right) (\cos \theta_s - \cos \theta_r) \right) \right]. \quad (8.39)$$

Для интенсивности возникнет перекрёстный член. Его влияние будет падать с увеличением разницы между длинами волн λ_1 и λ_2 .

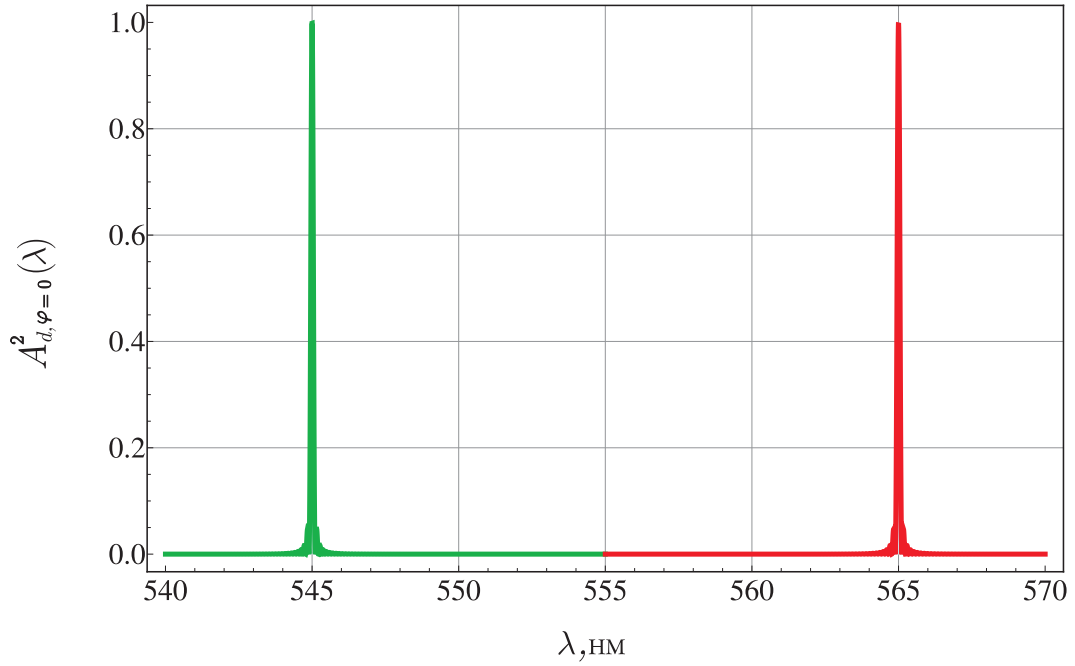


Рис. 5: $A_{d,\varphi=0}^2(\lambda)$ при следующих параметрах: $\lambda_1 = 545$ нм, $\lambda_2 = 565$ нм, $D_x = 1$ мм, $D_z = 0.1$ мм и углах $\theta_r = \pi/3$ и $\theta_s = \pi/6$.

На Рис.5 представлены интерференционные максимумы двух восстановленных сигнальных волн. Видно, что полученные интерференционные картины хорошо различимы. Заметим, что, если проводить запись для различных направлений сигнальной волны, результат будет абсолютно идентичен.

9 Заключение

В работе описаны процессы записи сигнального поля на голографическую пластинку и его последующего восстановления с точки зрения классической электродинамики, детально рассмотрен случай объёмной голограммы, когда поля являются плоскими линейно поляризованными волнами. Мы показали, что при считывании голограммы, в результате дифракции пробного поля, на выходе из среды будет восстановлена волна, направление распространения которой с высокой точностью повторяет направление распространения записанной волны.

Также была показана возможность мультиплексирования в случаях, когда разные сигнальные волны регистрируются при разных направлениях распространения опорной волны, но на одной частоте, и когда регистрация происходит на различных длинах волн. Результаты, полученные в данной работе, хорошо согласуются с текущими экспериментальными возможностями.

А Функция Грина для уравнения Гельмгольца

Решим уравнение Гельмгольца с дельта функцией в качестве правой части:

$$\nabla G(\mathbf{r}) + k_0^2 G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}).$$

Применим к нему преобразование Фурье по \mathbf{x} (обозначим $|\mathbf{k}| = k$):

$$(ik)^2 \hat{G}(\mathbf{k}) + k_0^2 \hat{G}(\mathbf{k}) = 1.$$

Таким образом преобразование Фурье от искомой функции Грина имеет вид:

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(k - k_0)(k + k_0)}.$$

Возьмём от неё обратное преобразование Фурье, чтобы найти саму функцию:

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^3} \iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{r})}}{(k - k_0)(k + k_0)} d\mathbf{k}.$$

Для удобства перейдём в сферические координаты, при этом введём их так, чтобы угол Θ отсчитывался от направления вектора \mathbf{r} (обозначим $|\mathbf{r}| = r$), тогда:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{e^{-ikr \cos \Theta}}{(k - k_0)(k + k_0)} k^2 \sin \Theta d\Theta = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^\pi \frac{k^2 e^{-ikr \cos \Theta}}{(k - k_0)(k + k_0)} d \cos \Theta = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k - k_0)(k + k_0)} \frac{e^{-ikr \cos \Theta}}{-ikr} \Big|_0^\pi = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 ir} \int_0^\infty \frac{k(e^{ikr} - e^{-ikr})}{(k - k_0)(k + k_0)} dk. \end{aligned}$$

Заметим, что подынтегральная функция чётна, в силу этого заменим интеграл по полуоси половиной интеграла по всей оси:

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2 ir} \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{k e^{ikr}}{(k - k_0)(k + k_0)} dk - \int_{-\infty}^\infty \frac{k e^{-ikr}}{(k - k_0)(k + k_0)} dk \right).$$

Вычислим эти интегралы по вычетам. Так как особые точки подынтегральной функции лежат на прямой, вдоль которой производится интегрирование, деформируем контур вниз вблизи точки k_0 и вверх вблизи $-k_0$. При этом, по лемме Жардана контур первого интеграла замкнём через верхнюю полуплоскость, а второй через нижнюю:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{8\pi^2 ir} \left(\int_{\gamma_+} \frac{k e^{ikr}}{(k - k_0)(k + k_0)} dk + \pi i \operatorname{res}_{-k_0} \frac{k e^{ikr}}{(k - k_0)(k + k_0)} - \right. \\ &\quad \left. - \pi i \operatorname{res}_{k_0} \frac{k e^{ikr}}{(k - k_0)(k + k_0)} + \int_{\gamma_-} \frac{k e^{-ikr}}{(k - k_0)(k + k_0)} dk - \right. \\ &\quad \left. + \pi i \operatorname{res}_{-k_0} \frac{k e^{-ikr}}{(k - k_0)(k + k_0)} - \pi i \operatorname{res}_{k_0} \frac{k e^{-ikr}}{(k - k_0)(k + k_0)} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{8\pi^2 ir} \left(\int_{\gamma_+} \frac{k e^{ikr}}{(k-k_0)(k+k_0)} dk + \pi i \frac{e^{-ik_0 r}}{2} - \pi i \frac{e^{ik_0 r}}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\gamma_-} \frac{k e^{-ikr}}{(k-k_0)(k+k_0)} dk + \pi i \frac{e^{ik_0 r}}{2} - \pi i \frac{e^{-ik_0 r}}{2} \right) = \\
&= -\frac{1}{8\pi^2 ir} \left(\int_{\gamma_+} \frac{k e^{ikr}}{(k-k_0)(k+k_0)} dk + \int_{\gamma_-} \frac{k e^{-ikr}}{(k-k_0)(k+k_0)} dk \right) = \\
&= -\frac{1}{8\pi^2 ir} \left(2\pi i \operatorname{res}_{k_0} \frac{k e^{ikr}}{(k-k_0)(k+k_0)} + 2\pi i \operatorname{res}_{-k_0} \frac{k e^{-ikr}}{(k-k_0)(k+k_0)} \right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi r} \left(\frac{e^{ik_0 r}}{2} + \frac{e^{ik_0 r}}{2} \right) = -\frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r}.
\end{aligned}$$

Полученный математический результат имеет простой физический смысл: исходное уравнение описывает электромагнитное поле в свободном пространстве с точечным источником, расположенном в начале координат, а его решение есть сферическая волна, исходящая от этого источника.

Список литературы

- [1] Ю.И. Островский. Голография и её применение, Издательство "НАУКА" ленинградское отделение (1973).
- [2] А.В Вениаминов, В.Н. Михайлов. Оптические системы записи, хранения и отображения информации. Санкт-Петербург, ИТМО (2009).
- [3] С.Б. Одинокоев, Д.С. Лушников, В.В. Маркин, А.Ю. Павлов, А.Ю. Бетин. Патент RU 2 473 944 C1 (2011).
- [4] И.В. Соколов, А. Гатти, М.И. Колобов, Л.А. Луджиато. Квантовая телепортация и голография. УФН **171**(11), 1264 (2001).
- [5] A.N. Vetlugin and I.V. Sokolov. Addressable parallel cavity-based quantum memory. Eur. Phys. Journ. D, **68**, 269 (2014).
- [6] T.Golubeva, Yu.Golubev, O.Mishina, A. Bramati, J. Laurat, E.Giacobino, Phys.Rev. A **83**(5), 053810 (2011).
- [7] A.S. Losev, K.S. Tikhonov, T.Yu. Golubeva, and Yu.M. Golubev. Storage and conversion of quantumstatistical properties of light in resonant quantum memory on a tripod atomic configuration. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **49**, 195501 (2016).
- [8] K.Tikhonov, K.Samburskaya, T.Golubeva, Yu.Golubev. Storage and retrieval of squeezing in multimode resonant quantum memories. Phys. Rev. A **89**, 013811 (2014).
- [9] K. Hammerer, A. S. Sorensen, and E. S. Polzik. Quantum interface between light and atomic ensembles. Rev. Mod. Phys. **82**, 1041 (2010).
- [10] C. Simon, M. Afzelius, J.Appel et al. Quantum Memories. A Review based on the European Integrated Project "Qubit Applications (QAP)". Eur. Phys. Journal D **58**(4), 1 (2010).
- [11] K. Heshami et al. Quantum memories: emerging applications and recent advances. J. Mod. Opt. **63**, 20 (2016)
- [12] D.D. Nolte. Mind at Light Speed: A New Kind of Intelligence. Simon and Schuster. New York (2001)
- [13] С.Я. Килин. Квантовая информация. УФН. **169**, 507 (1999)
- [14] F. Kalkum. Fast numerical simulation of diffraction from large volume holograms. J. Opt. Soc. Am. A **23**93 (2009)
- [15] G. Barbastathis, D. Psaltis. Volume Holographic Multiplexing Methods. Holographic Data Storage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2000).