

Санкт-Петербургский Государственный Университет

**Михайлов Александр Сергеевич**

**Выпускная квалификационная работа**

**Критерий перепутанности квантово-механических систем  
на основании квантовой информации Фишера**

Уровень образования: бакалавриат

Направление: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»

Образовательная программа: СВ.5009.2017 «Прикладные физика и  
математика»

Профиль «Квантовая оптика и информатика»

Научный руководитель:  
доцент,  
кафедра общей физики I,  
к.ф.-м.н. **Лосев А.С.**

Рецензент:  
старший научный сотрудник,  
физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова,  
к.ф.-м.н. **Герасимов Л. В.**

Санкт-Петербург  
2021

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1	Построение метрики в пространстве операторов плотности . . . . .	4
1.1	Оценочная функция и статистическое расстояние . . . . .	5
1.2	Минимизация статистического расстояния и классическая информация Фишера . . . . .	5
1.3	Оптимизация относительно квантовых измерений . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Построение критерия перепутанности</b>	<b>10</b>
1	Многомодовый коэффициент сжатия . . . . .	11
2	Формулировка в терминах многомерных квадратур . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Применение полученного критерия</b>	<b>15</b>
1	Двухмодовое сжатое состояние . . . . .	15

# Глава 1

## Введение

Запутанные, или, что то же самое, несепарабельные состояния, стали предметом научного обсуждения еще в 20-ых годах прошлого века, когда их открытие послужило причиной множества споров о возможных интерпретациях квантовой механики. Спустя много лет квантовая запутанность как неклассическое состояние всё еще находит своё применение в различных сферах современной физики [1, 2]. На текущий момент, квантовая запутанность является одним из наиболее важных и изучаемых явлений в квантовой оптике и квантовой теории информации, на основе которого разрабатываются новые способы передачи и кодирования информации. Известны применения квантовой запутанности в квантовых вычислениях, квантовой телепортации, квантовой криптографии и сверхплотном кодировании информации.

Изготовление перепутанных состояний на данный момент часто встречается при постановке различных экспериментов в названных областях. Для успешной работы с запутанными состояниями необходимо научиться также их детектировать, для чего в современной науке строятся различные критерии, с помощью которых можно обнаружить перепутанность. Однако, поставленная таким образом задача чрезвычайно сложна, а в общем случае, и вовсе не разрешена до сих пор. На данный момент, разработано множество критериев запутанности, как для систем с непрерывными переменными, где чаще всего используют критерии, основанные на соотношениях неопределённости [3], так и для систем с дискретными переменными.

Однако на данный момент уже разрабатывают критерии, способные определять запутанность вне зависимости от вида изучаемой физической системы, и наиболее универсальным из них является критерий, построенный на основе так называемой информации Фишера. Главным преимуществом использования этого критерия перед другими является возможность детектирования запутанности в системах, для которых наиболее часто применяемые в последние годы критерии не дают возможности определить перепутанность.

В данной работе исследуется построение одного из возможных критериев квантовой запутанности, основанном на квантовой информации Фишера. Первый раздел посвящен построению метрики в пространстве матриц плотности, в ходе которого определяется непосредственно информация Фишера и формулируются её свойства, среди которых - существование у неё верхней грани (также называемой квантовой информацией Фишера [4]). На основе этого и других свойств во втором разделе формулируется критерий перепутанности, в основе которого лежит информация Фишера, который затем обобщается на более широкий класс состояний. Третий раздел посвящен практическому применению сформулированного критерия на примере различных состояний. В приложениях к работе содержатся приложения, детально поясняющие выкладки и расчеты, проведенные в ходе написания работы.

# 1 Построение метрики в пространстве операторов плотности

Данная часть работы отведена построению метрики в пространстве операторов плотности. Необходимость введения данной метрики обусловлена, в первую очередь, распространённостью запутанных (несепарабельных) состояний в современной квантовой механике. Полезно уметь отличать «плохо» и «хорошо» запутанные состояния для решения различных задач, что и обеспечивается введение такой метрики.

Как известно, состояние  $\rho$  называется запутанным, если для него не возможна следующая запись (иными словами, оно не факторизуется следующим образом):

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k^{(1)} \otimes \cdots \otimes \rho_k^{(N)}, \text{ где} \quad (1.1)$$

$p_k \geq 0$ , а  $\rho_k^{(1)}, \dots, \rho_k^{(N)}$  - матрицы плотности соответствующих подсистем.

Однако в реальных задачах, вследствие различных физических ограничений, зачастую работают с неидеальными состояниями, в том числе возникают неидеально перепутанные состояния. В таком случае необходимо знать, насколько критична неидеальность такого перепутанного состояния.

Пусть  $\rho$  — идеально запутанное состояние. Посредством некоего воздействия мы слабо изменили это состояние, получив состояние  $\rho'$ . Данное изменение состояния эквивалентно его перемещению в пространстве операторов плотности. Наша задача — определить, насколько хорошо полученное состояние (по сравнению с  $\rho$ ), введя некую количественную характеристику этого перемещения.

Иначе говоря, будем говорить о том, что состояние  $\rho'$  хорошо запутано, если оно находится в пространстве матриц плотности в некоторой области рядом с состоянием  $\rho$ . В противном случае, если эти состояния разнесены на достаточно большое расстояние, будем считать, что состояние  $\rho'$  запутано плохо.

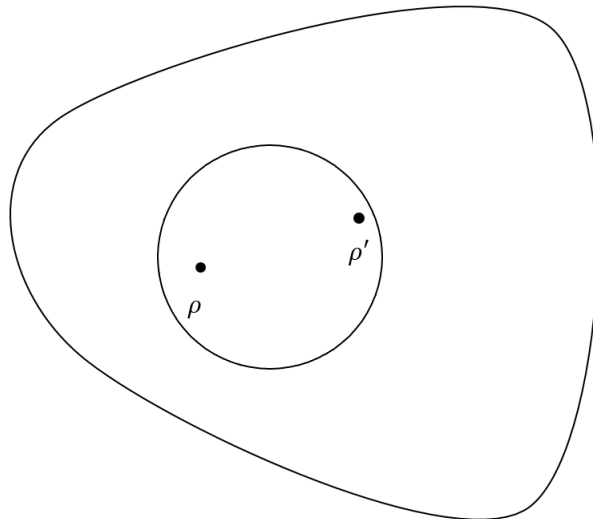


Рис. 1.1: Иллюстрация к рассматриваемой задаче

Для того, чтобы решать такую задачу, необходим способ измерения расстояния между двумя состояниями в пространстве матриц плотности, то есть необходимо ввести метрику в этом пространстве.

Будем рассматривать некоторое квантовое состояние, на которое подействовали слабым сигналом, который вызвал слабое изменение этого состояния. При заданном начальном состоянии этот сигнал параметризует кривую в пространстве матриц плотности, тогда детек-

тирование этого сигнала сводится к задаче о различимости двух близких состояний вдоль этой кривой.

В этом разделе работы изучается способ построения метрики различимости на пространстве операторов плотности. Методами теории вероятностей производится переход от классического рассмотрения к квантовым обобщенным измерениям, для чего используется информация Фишера. Приступим к рассмотрению процесса построения метрики, начав с формулировки задачи в классическом случае.

## 1.1 Оценочная функция и статистическое расстояние

Для начала рассмотрим вспомогательную классическую задачу, суть которой заключается в определении неизвестного параметра  $X$ , вычисление которого осуществляется исходя из результатов проводящихся над системой измерений.

Пусть  $\xi$  — величина, обозначающая результаты измерений. Рассмотрим  $N$  измерений с результатами  $\xi_1, \dots, \xi_N$ . Параметр  $X$  вычисляется с помощью некоторой подбираемой оценочной функции  $X_{est} = X_{est}(\xi_1, \dots, \xi_N)$ . На основании этой оценочной функции можно ввести статистическое расстояние. Разумное определение статистического расстояния - измерять приращение параметра  $dX$  в единицах статистического отклонения оценочной функции от параметра. Подходящая мера отклонения имеет вид

$$\frac{X_{est}}{|d\langle X_{est} \rangle / dX|} - X = \delta X. \quad (1.2)$$

Производная здесь "обезразмеривает" отклонение. Подходящей единицей измерения статистического отклонения является  $\min[\sqrt{N}\langle(\delta X)^2\rangle^{1/2}]$  ( $\sqrt{N}$  здесь устраняет улучшение от  $1/\sqrt{N}$  от числа измерений, таким образом мы хотим построить метрику, независимую от числа измерений). Таким образом, мы определяем метрику как

$$ds^2 = \frac{dX^2}{\min[N\langle(\delta X)^2\rangle_X]}. \quad (1.3)$$

Согласно выражению (1.3), для построения метрики нам необходимо минимизировать величину отклонения, находящуюся в знаменателе. Важно заметить, что минимум берется по двум параметрам задачи: по оценочной функции и по осуществляемым над системой измерениям. Проведём необходимую минимизацию.

## 1.2 Минимизация статистического расстояния и классическая информация Фишера

Как было отмечено в предыдущем подпункте, выражение (1.3) предполагает процедуру минимизации отклонения. Данный подраздел посвящен непосредственно процессу минимизации. Мы берём минимум в два шага: первый шаг заключается в оптимизации оценочной функции для заданного измерения для получения классической метрики различимости; на втором шаге осуществляется переход к квантовым измерениям и последующая оптимизация для получения квантовой метрики.

Классическая оптимизация основана на нижней грани, называемой гранью Крамера-Рао [5]. Из теории вероятности известно, что при известной плотности вероятности среднее значение величины может быть вычислено следующим образом:

$$\langle X_{est} \rangle_X = \int d\xi_1 \dots d\xi_N p(\xi_1|X) \dots p(\xi_N|X) X_{est}(\xi_1, \dots, \xi_N), \quad (1.4)$$

где  $p(\xi_1|X), \dots, p(\xi_N|X)$  — плотности вероятностей получить в результате измерения величину  $\xi_1, \dots, \xi_N$  при заданном значении параметра  $X$ . Исходя из данного равенства, мы можем

записать следующее соотношение:

$$0 = \int d\xi_1 \dots d\xi_N p(\xi_1|X) \dots p(\xi_N|X) \Delta X_{est}, \quad (1.5)$$

где  $\Delta X_{est} = X_{est}(\xi_1, \dots, \xi_N) - \langle X_{est} \rangle_X$ .

Дифференцируя данное равенство по  $X$ , получим

$$\int d\xi_1 \dots d\xi_N p(\xi_1|X) \dots p(\xi_N|X) \left( \sum_{n=1}^N \frac{\partial \ln p(\xi_n|X)}{\partial X} \right) \Delta X_{est} = \frac{d\langle X_{est} \rangle_X}{dX} \quad (1.6)$$

Применяя неравенство Шварца к выражению (1.6), получим *грань Крамера-Рао* (более подробный вывод этого соотношения приведен в **приложении А**)

$$NF(X) \langle (\Delta X_{est})^2 \rangle_x \geq \left( \frac{d\langle X_{est} \rangle_X}{dX} \right)^2, \quad (1.7)$$

где *информация Фишера* определяется как

$$F(X) = \int d\xi p(\xi|X) \left( \frac{\partial \ln p(\xi|X)}{\partial X} \right)^2 = \int d\xi \frac{1}{p(\xi|X)} \left( \frac{\partial p(\xi|X)}{\partial X} \right)^2 \quad (1.8)$$

Записанная в терминах (1.3), *грань Крамера-Рао* выглядит как

$$N \langle (\delta X)^2 \rangle_X \geq \frac{1}{F(X)} + N \langle \delta X \rangle_X^2 \geq \frac{1}{F(X)}. \quad (1.9)$$

*Грань Крамера-Рао* устанавливает только нижнюю границу на минимум из выражения (1.3). Теорема Фишера утверждает, что асимптотически для больших  $N$ , наиболее вероятная оценка не отклоняется и достигает грани Крамера-Рао.

Таким образом, воспользовавшись результатом этого раздела и применив его к выражению (1.3), для данного вероятностного распределения  $p(\xi|X)$ , мы получаем классическую метрику различимости

$$ds_{PD}^2 = F(X) dX^2. \quad (1.10)$$

Теперь, получив классическую метрику в таком виде, заметим, что следующий шаг оптимизации заключается в максимизации информации Фишера по всем квантовым измерениям.

### 1.3 Оптимизация относительно квантовых измерений

Теперь второй шаг в нашем процессе оптимизации сводится к максимизации информации Фишера относительно всех квантовых измерений. Для этого необходимо ввести так называемые обобщенные квантовые измерения, которые включают в себя все измерения, разрешенные правилами квантовой механики.

Обобщенные измерения описываются набором неотрицательных эрмитовых операторов  $\hat{E}(\xi)$ , которые полны

$$\int d\xi \hat{E}(\xi) = \mathbb{1}. \quad (1.11)$$

Необходимо заметить, что здесь интегрирование (используемое в случае непрерывных переменных) может быть заменено суммированием для дискретных переменных — дальнейшие выкладки от этого не изменятся.

Плотность вероятности для результата измерения  $\xi$  при заданном параметра  $X$ , определяется по формуле

$$p(\xi|X) = \text{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho}(X)). \quad (1.12)$$

После введения таких измерений приступим к оптимизации.

$$ds_{DO}^2 = dX^2 \max_{\hat{E}(\xi)} F(X). \quad (1.13)$$

Выражение для информации Фишера содержит деление на  $p(\xi|X)$ , поэтому в квантовом случае необходимо корректно определить данную операцию.

Для этого введём супероператор

$$\mathcal{R}_{\hat{\rho}}(\hat{O}) = \frac{1}{2}(\hat{\rho}\hat{O} + \hat{O}\hat{\rho}) = \sum_{k,j} \frac{1}{2}(p_j + p_k) O_{jk} |j\rangle\langle k|, \quad (1.14)$$

где второй вид выражения записан в ортонормированном базисе, в котором оператор  $\hat{\rho} = \sum_j p_j |j\rangle\langle j|$  диагонален.

Во внутренности пространства операторов плотности определён обратный оператор  $\mathcal{R}_{\hat{\rho}}(\hat{O})^{-1}$  с матричными элементами вида

$$[\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{O})]_{jk} = \frac{2O_{jk}}{p_j + p_k}. \quad (1.15)$$

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство этого оператора [7]

$$\text{tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Re}[\text{tr}(\hat{\rho}\hat{A}\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{B}))]. \quad (1.16)$$

Продолжая, подставим квантовое распределение (1.12) в информацию Фишера (1.8) и получим

$$F(X) = \int d\xi \frac{[\text{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho}'(X))]^2}{\text{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho}(X))}, \quad (1.17)$$

где  $\hat{\rho}' \equiv d\rho/dX$ .

Теперь в подынтегральном выражении воспользуемся свойством (1.16) при  $\hat{A} = \hat{E}$  и  $\hat{B} = \hat{\rho}'$ :

$$\text{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho}(X)) = \text{Re}[\text{tr}(\hat{\rho}\hat{E}\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}'))]. \quad (1.18)$$

Данная подстановка включает в себя  $\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')$ , в связи с чем необходимо рассмотреть производную оператора  $\hat{\rho}$ .

Начнем рассмотрение, записав операторы  $\hat{\rho}$  и  $\hat{\rho} + dX\hat{\rho}'$  в их ортонормированном базисе

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j |j\rangle\langle j|, \quad (1.19)$$

Запишем первый дифференциал этого оператора, учитывая одновременно как изменение вероятности, так и базиса:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} + dX\hat{\rho}' &= \sum_j (p_j + dp_j) |j'\rangle\langle j'| = \\ &= \sum_j dp_j |j\rangle\langle j| + e^{idX\hat{h}} \hat{\rho} e^{-idX\hat{h}}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где эрмитов оператор  $\hat{h}$  генерирует бесконечно малые унитарные преобразования базиса

$$|j'\rangle = e^{idX\hat{h}} |j\rangle = \sum_k (\delta_{kj} + idXh_{kj}) |k\rangle. \quad (1.21)$$

Сингулярность на границе можно устранить заменой переменных  $p_j = r_j^2$ .  
Можно показать, что

$$dX\hat{\rho}' = \sum_j dp_j |j\rangle\langle j| + idX \sum_{j,k} (p_j - p_k) h_{kj} |k\rangle\langle j|, \quad (1.22)$$

откуда следует

$$dX\text{tr}(\hat{A}\hat{\rho}') = 2 \sum_j r_j A_{jj} dr_j + idX \sum_{j,k} (p_j - p_k) A_{jk} h_{kj} = dX\text{Re}[\text{tr}(\hat{\rho}\hat{A}\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}'))], \quad (1.23)$$

при условии, что сингулярным матричным элементам  $\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')$  приписывают любое конечное значение, сохраняющее эрмитовость.

Выбирая их так, что они исчезают, аналитически продолжаем оператор  $\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')$  на границу

$$\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{O}) \equiv \sum_{\{j,k|p_j+p_k \neq 0\}} \frac{2}{p_j + p_k} O_{jk} |j\rangle\langle k|. \quad (1.24)$$

Теперь преобразуем информацию Фишера (1.17) для получения верхней границы

$$\begin{aligned} F &= \int d\xi \frac{\left(\text{Re}[\text{tr}(\hat{\rho}\hat{E}(\xi)\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}'))]\right)^2}{\text{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho})} \leq \int d\xi \frac{\left|\text{tr}(\hat{\rho}\hat{E}(\xi)\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}'))\right|^2}{\text{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho})} = \\ &= \int d\xi \left| \text{tr} \left( \frac{\hat{\rho}^{1/2}\hat{E}^{1/2}(\xi)}{\sqrt{\text{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho})}} \hat{E}^{1/2}\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')\hat{\rho}^{1/2} \right) \right|^2 \leq \int d\xi \text{tr}(\hat{E}(\xi)\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')\hat{\rho}\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')) = \\ &= \text{tr}(\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')\hat{\rho}\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')) \end{aligned} \quad (I) \quad (II) \quad (1.25)$$

Шаг (II) основан на неравенстве Шварца

$$|\text{tr}(\hat{O}^+\hat{P})|^2 \leq \text{tr}(\hat{O}^+\hat{O})\text{tr}(\hat{P}^+\hat{P}), \quad (1.26)$$

где  $\hat{O}^+ = \frac{\hat{\rho}^{1/2}\hat{E}^{1/2}(\xi)}{\sqrt{\text{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho})}}$ ,  $\hat{P} = \hat{E}^{1/2}\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')\hat{\rho}^{1/2}$ .

Конечное равенство следует из условия полноты (1.11).

Необходимыми и достаточными условиями равенства в выражении (1.25) являются, согласно шагу (I)

$$\text{Im}[\text{tr}(\hat{\rho}\hat{E}(\xi)\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}'))] = 0 \quad \forall \xi \quad (1.27)$$

и, при использовании неравенства Шварца на шаге (II)

$$\hat{E}^{1/2}(\xi)\hat{\rho}^{1/2} = \lambda_\xi \hat{E}^{1/2}(\xi)\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')\hat{\rho}^{1/2}, \quad (1.28)$$

где  $\lambda_\xi = \text{tr}(\hat{E}(\xi)\hat{\rho})/\text{tr}(\hat{\rho}\hat{E}(\xi)\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}'))$  — константа, зависящая только от  $\xi$ , так как равенство выполняется в случае, когда эти операторы пропорциональны друг другу. Важно обратить внимание, что условие (1.27) эквивалентно требованию вещественности  $\lambda_\xi$ .

Во внутренности пространства операторов плотности условия (1.27) и (1.28) эквивалентны

$$\hat{E}^{1/2}(\xi)[\mathbb{1} - \lambda_\xi \mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')] = 0 \quad \forall \xi \quad (1.29)$$

при вещественных  $\xi$ .

На границе условие (1.29) достаточно, но не необходимо. Это условие означает, что оператор  $\hat{E}^{1/2}(\xi)$  и, следовательно,  $\hat{E}(\xi)$  действует внутри единичного вырожденного подпространства оператора  $\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')$ , причем  $\lambda_\xi$  является обратным собственным значением  $\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')$  внутри этого подпространства.



Эти условия всегда могут быть удовлетворены путем выбора в качестве набора операторов  $\hat{E}(\xi)$  одномерных проекторов на полный набор ортогональных собственных состояний оператора  $\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(\hat{\rho}')$ .

Таким образом, верхняя грань (1.25) достигается, а метрика различимости на пространстве операторов плотности принимает вид

$$ds_{DO}^2 = \text{tr}(\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(d\hat{\rho})\hat{\rho}\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(d\hat{\rho})) = \text{tr}(d\hat{\rho}\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(d\hat{\rho})), \quad (1.30)$$

где вторая форма равенства следует из (1.23) с подстановкой  $\hat{A} = \mathcal{R}_{\hat{\rho}}^{-1}(d\hat{\rho})$ .

Следует обратить внимание, что эта достижимая верхняя граница не может быть использована для определения статистического расстояния.

Теперь, когда получена интересовавшая нас метрика, и получена верхняя грань для информации Фишера в обоих случаях, можно приступить к формулировке критерия перепутанности на основе информации Фишера.

# Глава 2

## Построение критерия перепутанности

Данный раздел посвящен формулировке критерия перепутанности с использованием квантовой информации Фишера и различных её свойств, в нём рассматривается процесс построения условия несепарабельности для многочастичных систем.

Будем рассматривать  $N$ -частичную систему, находящуюся в сепарабельном состоянии. Пусть  $\hat{A}_i$  - локальная наблюдаемая  $i$ -ой подсистемы,  $\text{Var}(\hat{A})_{\hat{\rho}}$  - дисперсия, а среднее значение есть  $\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}[\hat{A}\hat{\rho}]$ .

Информацию Фишера такой системы с набором локальных наблюдаемых  $\hat{A}_i$  и оператором плотности  $\hat{\rho}_{sep}$  будем обозначать как  $F_{\hat{M}} \left[ \hat{\rho}_{sep}, \sum_{i=1}^N \hat{A}_i \right]$ . Исследуем некоторые её свойства, которые затем применим при построении критерия.

Для начала заметим, что информация Фишера может быть максимизирована относительно всех наблюдаемых:

$$F_{\hat{M}} \leq F_Q, \quad (2.1)$$

где  $F_Q = \max_{\hat{M}} F_{\hat{M}}$  — квантовая информация Фишера [2].

Воспользовавшись свойством выпуклости (см. **приложение Б**) информации Фишера, можно продолжить данное неравенство:

$$F_Q \left[ \hat{\rho}_{sep}, \sum_{i=1}^N \hat{A}_i \right] \leq \sum_{\gamma} p_{\gamma} F_Q \left[ |\psi_{\gamma}\rangle, \sum_{i=1}^N \hat{A}_i \right] \quad (2.2)$$

Выражение (2.2) содержит в себе квантовую информацию Фишера, вычисляемую для чистого состояния. Она может быть вычислена непосредственно, и результат будет содержать дисперсию локальной наблюдаемой:

$$F_Q[|\psi_0\rangle, \hat{A}] = 4(\Delta A)^2. \quad (2.3)$$

Тогда наша последовательность неравенств принимает вид:

$$F_Q \left[ \hat{\rho}_{sep}, \sum_{i=1}^N \hat{A}_i \right] \leq \sum_{\gamma} p_{\gamma} F_Q \left[ |\psi_{\gamma}\rangle, \sum_{i=1}^N \hat{A}_i \right] \quad (2.4)$$

$$= 4 \sum_{\gamma} p_{\gamma} \text{Var} \left[ \sum_{i=1}^N \hat{A}_i \right]_{|\psi_{\gamma}\rangle} \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

Далее, имеем

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^N \hat{A}_i \right)_{\hat{\rho}} = \sum_{i,j=1}^N \text{Cov}(\hat{A}_i, \hat{A}_j)_{\hat{\rho}} \quad (2.7)$$

и

$$\text{Cov}(\hat{A}, \hat{A})_{\hat{\rho}} = \text{Var}(\hat{A})_{\hat{\rho}}. \quad (2.8)$$

Следующий шаг для получения критерия можно предпринять, заметив, что

$$\text{Cov}(\hat{A}_i, \hat{A}_j)_{|\psi_1^\gamma\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N^\gamma\rangle} = 0, i \neq j. \quad (2.9)$$

Таким образом,

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N \hat{A}_i\right)_{|\psi_1^\gamma\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N^\gamma\rangle} = \sum_{i=1}^N \text{Var}(\hat{A}_i)_{|\psi_i^\gamma\rangle}. \quad (2.10)$$

И мы можем записать

$$4 \sum_{\gamma} p_{\gamma} \text{Var} \left[ \sum_{i=1}^N \hat{A}_i \right]_{|\psi_{\gamma}\rangle} = 4 \sum_{\gamma} p_{\gamma} \sum_{i=1}^N \text{Var}(\hat{A}_i)_{|\psi_i^\gamma\rangle} \quad (2.11)$$

Заключительный шаг основан на вогнутости дисперсии [9], и неравенство принимает вид:

$$4 \sum_{\gamma} p_{\gamma} \sum_{i=1}^N \text{Var}(\hat{A}_i)_{|\psi_i^\gamma\rangle} \leq 4 \sum_{i=1}^N \text{Var}(\hat{A}_i)_{\hat{\rho}_{sep}} \quad (2.12)$$

Объединив все полученные неравенства, получим необходимое условие сепарабельности:

$$F_{\hat{M}} \left[ \hat{\rho}_{sep}, \sum_{i=1}^N \hat{A}_i \right] \leq 4 \sum_{i=1}^N \text{Var}(\hat{A}_i)_{\hat{\rho}_{sep}}, \quad (2.13)$$

Так как (2.13) является необходимым для сепарабельности, его нарушение — это достаточное условие запутанности.

В вышеприведённом выводе не делается предположение о локальных операторах  $\hat{A}_i$ . На самом деле, любой выбор  $\hat{A}_i$  приводит достаточному критерию перепутывания.

В данном подразделе работы мы рассмотрели новые свойства информации Фишера и дисперсии, что позволило нам приступить к построению критерия. Построенный нами критерий является, как было замечено выше, достаточным условием запутанности, что само по себе уже достаточно хорошо. Теперь нам предстоит обобщить полученное нами условие и сформулировать его на другом языке. Эти и другие шаги осуществляются в следующем подпункте нашей работы.

## 1 Многомодовый коэффициент сжатия

Попытаемся применить полученное неравенство (2.13) на случай  $N$ -частичного гильбертова пространства  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$  и посмотрим, какие выводы нам удастся сделать.

В предыдущем разделе мы установили, что любое сепарабельное состояние в таком пространстве удовлетворяет неравенству (2.13):

$$F_Q[\hat{\rho}_{sep}, \hat{A}] \leq 4 \text{Var}(\hat{A})_{\Pi(\hat{\rho}_{sep})}, \quad (2.14)$$

где  $\Pi(\hat{\rho}) = \hat{\rho}_1 \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_N$  - состояние, являющееся прямым произведением редуцированных матриц плотности  $\hat{\rho}_i$ . Редуцированная матрица плотности  $\hat{\rho}_i$ , используемая в записи такого состояния, это матрица плотности, описывающая  $i$ -ую подсистему нашей составной системы. Получить такую матрицу можно с помощью операции взятия частичного следа, иначе говоря, путем усреднения состояния  $\hat{\rho}_i$  по всем другим состояниям.

Как было показано ранее, квантовая информация Фишера имеет верхнюю грань

$$F_Q[\hat{\rho}, \hat{A}] \geq \frac{|\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_{\hat{\rho}}|^2}{\text{Var}(\hat{B})}, \quad (2.15)$$

которая соблюдается для произвольного состояния  $\rho$  и произвольной пары операторов  $\hat{A}, \hat{B}$  [10].

Комбинируя неравенства (2.14) и (2.15), получим основанный на дисперсии критерий сепарабельности

$$\text{Var}(\hat{A})_{\Pi(\hat{\rho}_{sep})} \text{Var}(\hat{B})_{\hat{\rho}_{sep}} \geq \frac{|\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_{\hat{\rho}_{sep}}|^2}{4}, \quad (2.16)$$

где  $\hat{B}$  - произвольный оператор, а  $\hat{A} = \sum_i \hat{A}_i$ .

Можно также сформулировать критерий сепарабельности, введя так называемые обобщенные сжимающие коэффициенты

$$\xi_{\hat{A}, \hat{B}}^2(\hat{\rho}) = \frac{4 \text{Var}(\hat{A})_{\Pi(\hat{\rho})} \text{Var}(\hat{B})_{\hat{\rho}}}{|\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_{\hat{\rho}}|^2}. \quad (2.17)$$

Видно, что для сепарабельных состояний  $\xi_{\hat{A}, \hat{B}}^2(\hat{\rho}_{sep}) \geq 1$ .

Начнем с анализа этого критерия применимо к системам непрерывных переменных. На данный момент большинство сформулированных критериев перепутанности для таких систем формулируются на языке вторых моментов, то есть функциях матрицы ковариаций [3],[11].

Стандартные методы детектирования перепутанности основаны на гауссовых проверках критерия положительного частичного транспонирования (так называемый РРТ-критерий), которые применимы двухчастичным системам и дают необходимое и достаточное условие перепутанности двухмодовых гауссовых состояний. Если обе подсистемы состоят более чем из одной моды, это условие перестаёт быть достаточным, так как может возникнуть граничное перепутывание. РРТ-критерий также близок к условиям сепарабельности, основанных на соотношениях неопределённости Гейзенберга-Робертсона [12], [13].

Наиболее общая формулировка этих критериев для двухчастичных систем приведена в [14]. Заметим, что приведённое ниже доказательство может быть напрямую обобщено на многочастичный случай, приводя к условию сепарабельности:

$$\text{Var}(\hat{A}(\alpha))_{\hat{\rho}_{sep}} \text{Var}(\hat{B}(\beta))_{\hat{\rho}_{sep}} \geq \frac{\left( \sum_{i=1}^N |\alpha_i \beta_i \langle [\hat{A}_i, \hat{B}_i] \rangle_{\hat{\rho}_{sep}}| \right)^2}{4}, \quad (2.18)$$

где  $\hat{A}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \hat{A}_i$  и  $\hat{B}(\beta) = \sum_{i=1}^N \beta_i \hat{B}_i$  — линейные комбинации произвольных операторов  $\hat{A}_i$  и  $\hat{B}_i$ , действующих на локальные гильбертовы пространства  $\mathcal{H}_i$ , с вещественными коэффициентами  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  и  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ .

Для двумодового состояния ( $N = 2$ ) показано, что критерий (2.18) является более сильным, чем критерии, включающие в себя сумму (а не произведение) двух дисперсий, которые в свою очередь были расширены на многочастичные системы в [15]. В случае, когда операторы  $\hat{A}_i$  и  $\hat{B}_i$  сводятся к квадратурам, семейство критериев (2.18) при ( $N = 2$ ) эквивалентно РРТ-критерию.

Критерий (2.18) теперь может быть сравнён с критерием перепутанности, следующему из приведённого ранее подхода для детектирования перепутывания с помощью локальных дисперсий, на основании неравенства (2.14).

Пользуясь этим неравенством, находим, что любое сепарабельное состояние в непрерывных переменных  $\hat{\rho}_{sep}$  должно удовлетворять границе

$$\text{Var}(\hat{A}(\alpha))_{\Pi(\hat{\rho}_{sep})} \text{Var}(\hat{B}(\beta))_{\hat{\rho}_{sep}} \geq \frac{|\sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i \langle [\hat{A}_i, \hat{B}_i] \rangle_{\hat{\rho}_{sep}}|^2}{4}. \quad (2.19)$$

В отличие от выражения (2.18), условие (2.19) формулируется без использования соотношений неопределённости. Заметим также, что в (2.18)  $\hat{B}(\beta)$  необходимы быть суммами

локальных операторов, тогда этот критерий может быть уточнен путем использования более общих операторов вместо  $\hat{B}(\beta)$ .

Два этих необходимых условия сепарабельности (2.18) и (2.19) надо сравнивать с общей границей

$$\text{Var}(\hat{A}(\alpha))_{\Pi(\hat{\rho})} \text{Var}(\hat{B}(\beta))_{\hat{\rho}} \geq \frac{|\sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i \langle [\hat{A}_i, \hat{B}_i] \rangle_{\hat{\rho}}|^2}{4}, \quad (2.20)$$

основанной на соотношении неопределённости Гейзенберга-Роберстона для произвольных состояний [12], [13].

Оба рассмотренных метода могут быть интерпретированы как ограничения на соотношение неопределённости, приводящие к разным условиям, которые удовлетворяются только сепарабельными состояниями. С одной стороны, выражение (2.18) лучше по сравнению с (2.20) за счет более жесткой границы для перепутанных состояний  $\left(\sum_{i=1}^N |\alpha_i \beta_i \langle [\hat{A}_i, \hat{B}_i] \rangle_{\hat{\rho}_{sep}}|\right)^2 \geq |\sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i \langle [\hat{A}_i, \hat{B}_i] \rangle_{\hat{\rho}}|^2$ . С другой стороны, в выражении (2.19) дисперсия  $\text{Var}(\hat{A}(\alpha))_{\Pi(\hat{\rho}_{sep})}$  вычисляется для состояния  $\Pi(\hat{\rho}_{sep})$  и, таким образом, данное условие отличается от соотношения неопределённости (2.20) несмотря на то, что правые части этих неравенств совпадают.

В дальнейшем изложении будем опираться на условие (2.19) и переформулируем его на языке многомерных квадратур и матриц ковариации, что и позволит в итоге сформулировать многомодовый коэффициент сжатия.

## 2 Формулировка в терминах многомерных квадратур

В данном разделе проиллюстрируем то, как критерий (2.19) может быть использован при конкретном выборе доступных операторов. В случае дискретных переменных самый общий нетривиальный оператор параметризуется конечным числом генерирующих операторов, позволяющих систематическую оптимизацию коэффициентов спинового сжатия как функций этих параметров. В бесконечномерных гильбертовых пространствах такая параметризация включала бы в себя бесконечное число параметров. Критерий запутанности может быть построен с использованием выражения (2.14), и таким образом, выражение (2.19) будет зависеть от заранее определённого набора доступных операторов [6].

Построим критерий запутанности на основе операторов локальных координат  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$  и импульсов  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N$ .

Рассмотрим оператор

$$\hat{M}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N (n_i \hat{x}_i + m_i \hat{p}_i), \quad (2.21)$$

в котором  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$ ,  $v_j = n_j + i m_j$ , а коэффициенты  $n_j$  и  $m_j$  выбраны вещественными.

В общем случае, критерии вида (2.19) формулируются и с использованием формализма матриц ковариации для систем в непрерывных переменных [16, 17].

Введём в рассмотрение вектор размерности  $2N$

$$\hat{r} = (\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_{2N}) = (\hat{x}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{x}_N, \hat{p}_N). \quad (2.22)$$

Определим с его помощью поэлементно матрицу ковариаций состояния  $\hat{\rho}$

$$(\gamma_{\hat{\rho}})_{\alpha\beta} = \text{Cov}(\hat{r}_{\alpha}, \hat{r}_{\beta})_{\hat{\rho}}. \quad (2.23)$$

Произвольные локальные операторы

$$\hat{M}(g) = \sum_{i=1}^{2N} g_i \hat{r}_i, \quad (2.24)$$

с вещественным вектором  $g = (g_1, \dots, g_{2N})$  будут удовлетворять следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{M}(g), \hat{M}(h)] = \sum_{i,j=1}^{2N} h_i g_j [\hat{r}_i, \hat{r}_j] = i \mathbf{h}^T \Omega \mathbf{g}, \quad (2.25)$$

где  $\Omega = \oplus_{i=1}^N \omega$ , с  $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Дисперсия такого оператора, выраженная в терминах матрицы ковариаций будет выглядеть как:

$$\text{Var}(\hat{M}(g))_{\hat{\rho}} = \sum_{i,j=1}^{2N} g_i g_j \text{Cov}(\hat{r}_i, \hat{r}_j)_{\hat{\rho}} = \mathbf{g}^T \gamma_{\hat{\rho}} \mathbf{g}. \quad (2.26)$$

Теперь мы можем переписать критерий сепарабельности (2.19) в новых терминах

$$(\mathbf{h}^T \gamma_{\Pi(\hat{\rho}_{sep})} \mathbf{h})(\mathbf{g}^T \gamma_{\hat{\rho}_{sep}} \mathbf{g}) \geq \frac{(\mathbf{h}^T \Omega \mathbf{g})^2}{4}, \quad (2.27)$$

где  $\gamma_{\Pi(\hat{\rho}_{sep})}$  – матрица ковариаций, в которой не учитываются корреляции, получаемая из  $\gamma_{\hat{\rho}_{sep}}$  путем зануления всех элементов за исключением  $2 \times 2$  блоков на диагонали.

Выражение (2.28) можно упростить, используя только пары векторов, максимизирующих правую часть, в которой стоит скалярное произведение векторов  $h$  и  $\Omega g$ . Для двух векторов фиксированной длины их скалярное произведение, очевидно, будет максимально в случае, когда они параллельны или антипараллельны, то есть  $h = \pm \Omega g$

$$(\mathbf{h}^T \gamma_{\Pi(\hat{\rho}_{sep})} \mathbf{h})(\mathbf{g}^T \gamma_{\hat{\rho}_{sep}} \mathbf{g}) \geq \frac{(\mathbf{h}^T \Omega \mathbf{g})^2}{4}, \quad (2.28)$$

Тогда необходимое условие сепарабельности запишется как

$$\xi^2(\hat{\rho}_{sep}) := \min_g \xi_g^2(\hat{\rho}_{sep}) \geq 1, \quad (2.29)$$

где согласно определению (2.17), вводится *бозонный многомодовый коэффициент сжатия*

$$\xi_g^2(\hat{\rho}) := \frac{4(\mathbf{g}^T \Omega^T \gamma_{\Pi(\hat{\rho})} \Omega \mathbf{g})(\mathbf{g}^T \gamma_{\hat{\rho}} \mathbf{g})}{(\mathbf{g}^T \mathbf{g})^2} \quad (2.30)$$

Определённый таким образом коэффициент  $\xi_g^2(\hat{\rho})$  может быть легко получен из матрицы ковариаций. Оптимизация в условии (2.29) включает в себя  $2N$  свободных параметров, а нормализация  $g$  уменьшает их количество на единицу. В следующем разделе, посвященном разбору примеров использования критерия, будет показано, что разумно минимизировать  $g$ , выбирая его так, чтобы он являлся собственным вектором для матрицы  $\gamma_{\hat{\rho}}$ , отвечающим наименьшему собственному значению, то есть фокусироваться сначала на минимизации последнего множителя в (2.30).

В данном подразделе работы был сформулирован критерий перепутанности на основе многомодового коэффициента сжатия, была рассмотрена его формулировка в терминах квадратур и использованием операторов координаты и импульса. С помощью языка матрицы ковариаций была выведена новая форма необходимого условия сепарабельности.

# Глава 3

## Применение полученного критерия

Этот раздел посвящен практическому применению разработанного критерия и состоит из рассмотрения примера его использования. В качестве примера взяли двухмодовое сжатое состояние. Изучим пример подробнее в соответствующем подразделе.

### 1 Двухмодовое сжатое состояние

Рассмотрим, как применить критерий запутанности к двухмодовому сжатому состоянию. Рассмотрим двухмодовое вакуумное состояние

$$|\Psi_r^{(2)}\rangle = \hat{S}_{12}[r]|0, 0\rangle, \quad (3.1)$$

сгенерированное оператором  $\hat{S}_{12}[\xi] = e^{\xi\hat{a}_1^+\hat{a}_2^+ - \xi^*\hat{a}_1\hat{a}_2}$ ,  $|0\rangle$  - вакуумное состояние. Покажем, что для таких состояний нарушается выражение (2.29), что говорит о их несепарабельности.

Заметим для начала, что рассматриваемое состояние - гауссово, а потому полностью описывается своей матрицей ковариаций. Эта матрица имеет вид:

$$\gamma_{|\Psi_r^{(2)}\rangle} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} R^{(2)} & 0 & S^{(2)} & 0 \\ 0 & R^{(2)} & 0 & -S^{(2)} \\ S^{(2)} & 0 & R^{(2)} & 0 \\ 0 & -S^{(2)} & 0 & R^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где  $R^{(2)} = \cosh(2r)$ ,  $S^{(2)} = \sinh(2r)$ . Для  $r > 0$  она описывает корреляции координаты и импульса:  $\text{Var}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)_{|\Psi_r^{(2)}\rangle} = \text{Var}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)_{|\Psi_r^{(2)}\rangle} = e^{-2r}$ .

Выберем  $g_{xp} = (c_x, c_p, -c_x, c_p)$  с произвольными  $c_x$  и  $c_p$ , который является собственным вектором матрицы (3.2) с минимальным собственным значением  $(R^{(2)} - S^{(2)})/2$ . Данный выбор соответствует оператору  $\hat{M}(g) = c_x(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + c_p(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)$  и приводит к  $\mathbf{g}^T \gamma_{|\Psi_r^{(2)}\rangle} \mathbf{g} = (c_x^2 + c_p^2)e^{-2r}$ .

Матрица ковариаций, исключая корреляции как было отмечено в предыдущей главе, получается из исходной занулением всех элементов, за исключением блоков  $2 \times 2$  на диагонали:

$$\gamma_{\Pi(|\Psi_r^{(2)}\rangle)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} R^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Таким образом,  $\mathbf{g}_{xp}^T \Omega^T \gamma_{\Pi(|\Psi_r^{(2)}\rangle)} \Omega \mathbf{g}_{xp} = (c_x^2 + c_p^2)R^{(2)}$  и с учетом  $\mathbf{g}_{xp}^T \mathbf{g}_{xp} = 2(c_x^2 + c_p^2)$ , окончательно получаем

$$\xi^2(|\Psi_r^{(2)}\rangle) = \frac{1}{2}(1 + e^{-4r}) \geq 1, \quad (3.4)$$

что нарушается для всех  $r > 0$ .

Такой выбор  $g_{xp}$  является оптимальным, что можно видеть на графике, представленном на рисунке 3.1, иллюстрирующим сравнение аналитического решения с результатами численного моделирования.

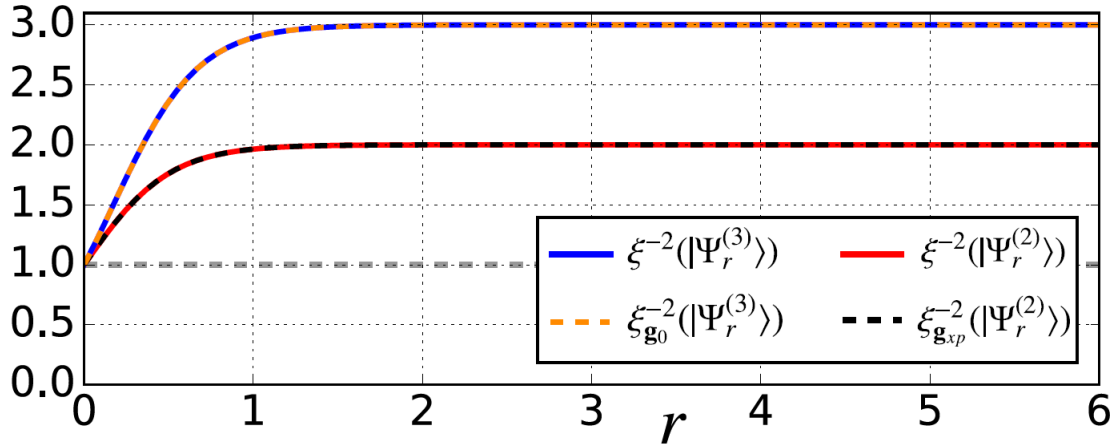


Рис. 3.1: Численно оптимизированные обратные многомодовые коэффициенты сжатия и их аналитические предсказания, согласно выражению (3.4) для двумодового сжатого состояния (на графике результат численного моделирования изображен сплошной линией красного цвета, а результат аналитического решения представлен черным пунктиром).

На приведённом рисунке видно, что коэффициенты нарушают условие сепарабельности для всех значений параметра  $r > 0$ . Построенный критерий на языке матрицы ковариаций позволил детектировать запутанность для двумодового сжатого состояния, что говорит о его состоятельности.



# Заключение

Путем построения метрики пространства матриц плотности и последующего введения информации Фишера и установления её свойств был сформулирован критерий, являющийся необходимым условием сепарабельности квантовых систем. Рассмотрение  $N$ -частичной сепарабельной системы и изучение её информации Фишера позволило переформулировать разработанный критерий на языке многомодового коэффициента сжатия, что в свою очередь, привело к возможности использования формализма матриц ковариации. С помощью изучения матриц ковариации удалось сформулировать критерий в терминах многомерных квадратур, который в последствии был применён для детектирования запутанности в двумодовом сжатом состоянии. Полученные для такой физической системы результаты смогли определить запутанность, причем предложенное аналитическое решение также подтверждается результатами численного моделирования для значения коэффициента сжатия. Все эти результаты говорят о состоятельности полученного условия и возможности его последующего применения в задачах современной квантовой механики, причем его можно использовать для любых физических систем, а не только для непрерывных.

## Приложение А: получение грани Крамера-Рао

Докажем соотношения (1.6) - (1.9).

Продифференцируем (1.5) по переменной  $X$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} \int d\xi_1 \dots d\xi_N p(\xi_1|X) \dots p(\xi_N|X) \Delta X_{est} &= \\ &= \int \frac{\partial}{\partial X} d\xi_1 \dots d\xi_N p(\xi_1|X) \dots p(\xi_N|X) \Delta X_{est}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Зная, что  $\rho \sim \exp\left(-\frac{N}{2}(X - \xi_j)^2/\xi_j\right)$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \exp\left(-\frac{N}{2}(X - \xi_j)^2/\xi_j\right) = -N \exp(\dots) \frac{X - \xi_j}{\xi_j} \quad (3.6)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln[\exp\left(-\frac{N}{2}(X - \xi_j)^2/\xi_j\right)] = -N \frac{X - \xi_j}{\xi_j} \quad (3.7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{\partial}{\partial X} d\xi_1 \dots d\xi_N p(\xi_1|X) \dots p(\xi_N|X) \Delta X_{est} = \\ &= \int d\xi_1 \dots d\xi_N p(\xi_1|X) \dots p(\xi_N|X) \left[ \sum_{n=1}^N \frac{\partial \ln p(\xi_n|X)}{\partial X} \Delta X_{est} + \frac{d\Delta X_{est}}{dX} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Учтем, что

$$\frac{d\Delta X_{est}}{dX} = -\frac{d\langle X_{est} \rangle}{dX} \quad (3.9)$$

И получим выражение (1.6). Рассмотрим следующее выражение и применим к нему неравенство Шварца

$$\begin{aligned} &\int d\xi_1 \dots d\xi_N p(\xi_1|X) \dots p(\xi_N|X) \left[ \sum_{n=1}^N \frac{\partial \ln p(\xi_n|X)}{\partial X} \right]^2 \int d\xi_1 \dots d\xi_N (\Delta X_{est})^2 \geq \\ &\geq \left( \int d\xi_1 \dots d\xi_N p(\xi_1|X) \dots p(\xi_N|X) \left( \sum_{n=1}^N \frac{\partial \ln p(\xi_n|X)}{\partial X} \right) \Delta X_{est} \right)^2 = \left( \frac{d\langle X_{est} \rangle}{dX} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Второй интеграл исходного произведения вычисляется явно:

$$\int d\xi_1 \dots d\xi_N (\Delta X_{est})^2 = \langle (\Delta X_{est})^2 \rangle. \quad (3.11)$$

Учтем, что

$$\left[ \sum_{n=1}^N \frac{\partial \ln p(\xi_n|X)}{\partial X} \right]^2 \leq N \left[ \frac{\partial \ln p(\xi_n|X)}{\partial X} \right]^2 \quad (3.12)$$

Объединяя полученные неравенства, получим грань Крамера-Рао. Вторая форма неравенства получается аналогично.

## Приложение Б: выпуклость информации Фишера

Рассмотрим для простоты сначала классический случай, а потом обобщим на квантовый. Начнем с того, что будем считать, что наши измерения определяются набором эрмитовых положительно определённых операторов, обладающих также свойством полноты [7].

Рассмотрим произвольное состояние  $\hat{\rho}(\theta) = \sum_k \gamma_k \hat{\rho}_k(\theta)$  с  $\gamma_k > 0$  и  $\sum_k \gamma_k = 1$ .

Тогда  $\text{Tr}[\hat{E}(\epsilon)\hat{\rho}(\theta)] = \sum_k \gamma_k \text{Tr}[\hat{E}(\epsilon)\hat{\rho}_k(\theta)]$  или, эквивалентно

$$P(\epsilon|\theta) = \sum_k \gamma_k P_k(\epsilon|\theta) \quad (3.13)$$

Покажем, что

$$F(\theta) \leq \sum_k \gamma_k F_k(\theta), \quad (3.14)$$

где  $F_k(\theta) = \sum_\epsilon \frac{1}{P_k(\epsilon|\theta)} \left[ \frac{dP_k(\epsilon|\theta)}{d\theta} \right]^2$ .

Рассмотрим

$$\left[ \frac{dP(\epsilon|\theta)}{d\theta} \right]^2 = \left[ \sum_k \gamma_k \frac{dP_k(\epsilon|\theta)}{d\theta} \right]^2 \leq \sum_k \gamma_k P_k(\epsilon|\theta) \sum_k \gamma_k \frac{1}{P_k(\epsilon|\theta)} \left[ \frac{dP_k(\epsilon|\theta)}{d\theta} \right]^2 \quad (3.15)$$

Откуда

$$\frac{1}{P(\epsilon|\theta)} \left[ \frac{dP(\epsilon|\theta)}{d\theta} \right]^2 \leq \sum_k \gamma_k \frac{1}{P_k(\epsilon|\theta)} \left[ \frac{dP_k(\epsilon|\theta)}{d\theta} \right]^2 \quad \forall \epsilon, \theta \quad (3.16)$$

Просуммируем обе части по всем  $\epsilon$  и получим выражение (3.14).

Далее обобщим это свойство на квантовую информацию Фишера, вспомнив, что она является информацией Фишера, вычисленной на наборе операторов  $\{\hat{E}_{opt, \hat{\rho}(\theta)}(\epsilon)\}$ , являющимся оптимальным для конкретного состояния  $\hat{\rho}(\theta)$ . Учитывая, что  $\hat{\rho}(\theta) = \sum_k \gamma_k \hat{\rho}_k(\theta)$  и пользуясь уже доказанной выпуклостью информации Фишера, запишем

$$F_Q[\hat{\rho}(\theta)] = F[\hat{\rho}(\theta), \{\hat{E}_{opt, \hat{\rho}(\theta)}(\epsilon)\}] \leq \sum_k \gamma_k F[\hat{\rho}_k(\theta), \{\hat{E}_{opt, \hat{\rho}(\theta)}(\epsilon)\}] \quad (3.17)$$

Воспользуемся опять определением квантовой информации Фишера и получим

$$F[\hat{\rho}_k(\theta), \{\hat{E}_{opt, \hat{\rho}(\theta)}(\epsilon)\}] \leq \max_{\hat{E}(\epsilon)} F[\hat{\rho}_k(\theta), \{\hat{E}(\epsilon)\}] = F_Q[\hat{\rho}_k(\theta)], \quad (3.18)$$

где  $F_Q[\hat{\rho}_k(\theta)] = F[\hat{\rho}_k(\theta), \{\hat{E}_{opt, \hat{\rho}_k(\theta)}(\epsilon)\}]$  и  $\{\hat{E}_{opt, \hat{\rho}_k(\theta)}(\epsilon)\}$  - оптимальный набор операторов для состояния  $\hat{\rho}_k(\theta)$ .

Объединяя неравенства (3.17) и (3.18), получим:

$$F_Q \left[ \sum_k \gamma_k \hat{\rho}_k(\theta) \right] \leq \sum_k \gamma_k F_Q[\hat{\rho}_k(\theta)]. \quad (3.19)$$

## Приложение В: информация Фишера чистого состояния

Рассчитаем информацию Фишера для чистого состояния. Будем в данном выводе придерживаться изложения [4] и [8].

В [7] показано, что

$$F_Q[\hat{\rho}(\theta)] = \text{Tr}[\hat{\rho}(\theta)\hat{L}_\theta^2], \quad (3.20)$$

где эрмитов оператор  $\hat{L}_\theta$ , называющийся симметричной логарифмической производной, определяется как решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \hat{\rho}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\hat{\rho}(\theta)\hat{L}_\theta + \hat{L}_\theta\hat{\rho}(\theta)}{2}. \quad (3.21)$$

Определим теперь квантовую информацию Фишера и симметричную логарифмическую производную в терминах полного базиса  $|k\rangle$  такого, что  $\hat{\rho}(\theta) = \sum_k p_k |k\rangle\langle k|$  и  $\sum_k p_k = 1$ ,  $p_k > 0$ .

Для этого заметим, что уравнение (3.20) в этом базисе будет иметь вид

$$F_Q[\hat{\rho}(\theta)] = \sum_{k,k'} p_k |\langle k|\hat{L}_\theta|k'\rangle|^2 = \sum_{k,k'} \frac{p_k + p_{k'}}{2} |\langle k|\hat{L}_\theta|k'\rangle|^2 \quad (3.22)$$

Теперь, с помощью уравнения (3.21) вычислим матричные элементы  $\langle k|\hat{L}_\theta|k'\rangle$  и получим  $\langle k|\hat{L}_\theta|k'\rangle = 2\langle k|\partial_\theta \rho(\theta)|k'\rangle / (p_k + p_{k'})$  [8]. Тогда исходное уравнение принимает вид

$$F_Q[\hat{\rho}(\theta)] = \sum_{k,k'} \frac{2}{p_k + p_{k'}} |\langle k|\partial_\theta \rho(\theta)|k'\rangle|^2 \quad (3.23)$$

Теперь заметим, что

$$\partial_\theta \rho(\theta) = \sum_k (\partial_\theta p_k) |k\rangle\langle k| + \sum_k p_k |\partial_\theta k\rangle\langle k| + \sum_k p_k |k\rangle\langle \partial_\theta k|, \quad (3.24)$$

где  $|\partial_\theta k\rangle \equiv \partial_\theta |k\rangle$ .

Таким образом имеем

$$\langle k|\partial_\theta \rho(\theta)|k'\rangle = (\partial_\theta p_k) \delta_{k,k'} + (p_k - p_{k'}) \langle \partial_\theta k|k'\rangle. \quad (3.25)$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $\langle k|k'\rangle = \delta_{k,k'}$  и  $\partial_\theta \langle k|k'\rangle = \langle \partial_\theta k|k'\rangle + \langle k|\partial_\theta k'\rangle = 0$ . Тогда оператор симметричной логарифмической производной приобретает вид [8]

$$\hat{L}_\theta = \sum_k \frac{\partial_\theta p_k}{p_k} |k\rangle\langle k| + 2 \sum_{k,k'} \frac{p_k - p_{k'}}{p_k + p_{k'}} |k\rangle\langle \partial_\theta k|k'\rangle\langle k'|, \quad (3.26)$$

а квантовая информация Фишера становится равной

$$F_Q[\hat{\rho}(\theta)] = \sum_k \frac{\partial_\theta p_k}{p_k} + 2 \sum_{k,k'} \frac{(p_k - p_{k'})^2}{p_k + p_{k'}} |\langle \partial_\theta k|k'\rangle|^2. \quad (3.27)$$

Для чистого состояния  $\hat{\rho}(\theta) = |\psi(\theta)\rangle\langle \psi(\theta)|$  получим

$$\hat{L}_\theta = 2[|\psi\rangle\langle \partial_\theta \psi| + |\partial_\theta \psi\rangle\langle \psi|] \quad (3.28)$$

и

$$F_Q[|\psi(\theta)\rangle] = 4(\langle \partial_\theta \psi|\partial_\theta \psi\rangle - |\langle \partial_\theta \psi|\psi\rangle|^2) \quad (3.29)$$

Перейдем теперь к рассмотрению нашего конкретного случая унитарного преобразования

$$\hat{\rho}(\theta) = e^{-i\theta \hat{H}} \hat{\rho}_0 e^{i\theta \hat{H}}, \quad (3.30)$$

где оператор  $\hat{H}$  - эрмитов, а  $\hat{\rho}_0$  - начальное состояние системы.

Заметим, что в диагональном базисе  $\hat{\rho}_0 = \sum_k p_k |k\rangle\langle k|$  и  $\hat{\rho}(\theta) = \sum_k p_k e^{-i\theta\hat{H}} |k\rangle\langle k| e^{i\theta\hat{H}}$ , то есть собственные значения  $p_k$  не изменяются при таком преобразовании.

Симметричная логарифмическая производная будет определена следующим образом [8]

$$\hat{L}_\theta = e^{-i\theta\hat{H}} \hat{L}_0 e^{i\theta\hat{H}}. \quad (3.31)$$

Тогда квантовая информация Фишера выражается через  $\hat{L}_0$  следующим образом

$$F_Q[\hat{\rho}_0, \hat{H}] = (\Delta L_0)^2. \quad (3.32)$$

Оператор  $\hat{L}_0$  будет равен [4]:

$$\hat{L}_0 = 2i \sum_{k,k'} \frac{p_k - p_{k'}}{p_k + p_{k'}} |k\rangle\langle k| \hat{H} |k'\rangle\langle k'|, \quad (3.33)$$

тогда

$$F_Q[\hat{\rho}_0, \hat{H}] = 2 \sum_{k,k'} \frac{(p_k - p_{k'})^2}{p_k + p_{k'}} |\langle k| \hat{H} |k'\rangle|^2, \quad (3.34)$$

где вклад в сумму дают только те слагаемые, для которых  $p_k + p_{k'} \neq 0$ . Для чистых состояний  $\hat{\rho}_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  эти уравнения упрощаются:

$$\hat{L}_0 = 2i |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \hat{H} - 2i \hat{H} |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \quad (3.35)$$

и

$$F_Q[|\psi_0\rangle, \hat{H}] = 4(\Delta H)^2. \quad (3.36)$$

# Литература

- [1] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, Quantum Entanglement, *Rev. Mod. Phys.* 81, 865 (2009).
- [2] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral, Entanglement in many-body systems, *Phys. Rep.* 419, 143 (2005).
- [3] L.-M Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems, *Phys Rev. Lett.* 84, 2722 (2000).
- [4] L. Pezze, A. Smerzi, Quantum theory of phase estimation, *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi* (2016).
- [5] Г. Крамер. Математические методы статистики, М.: Мир, 1976. 648 с.
- [6] M. Gessner, L. Pezze и A. Smerzi, Efficient entanglement criteria for discrete, continuous, and hybrid variables, *Phys. Rev. A* 94, 020101(R) (2016).
- [7] S. L. Braunstein, C. M. Caves, Statistical distance and the geometry of quantum states, *Phys. Rev. Lett.* 72, 3439 (1994).
- [8] M. G. Paris, *Intl. J. Quant. Inf.* 7, 125 (2009).
- [9] O. Gühne, Characterizing entanglement via Uncertainty Relations, *Phys. Rev. Lett.* 92, 11793 (2004).
- [10] M. Gessner, L. Pezze и A. Smerzi, Entanglement and squeezing in continuous-variable systems, QSTAR, INO-CNR and Lens (2017).
- [11] R. Simon, Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems, *Phys. Rev. Lett.* 84, 2722 (2000).
- [12] W. Heisenberg, *Z. Phys.* 43, 172 (1927).
- [13] H. P. Robertson, *Phys. Rev.* 34, 163 (1929).
- [14] V. Giovannetti, S. Mancini, D. Vitali, and P. Tombesi, Characterizing the entanglement of bipartite quantum systems, *Phys. Rev. A* 67, 022320 (2003).
- [15] P. van Loock and A. Furusawa, Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement, *Phys. Rev. A* 67, 052315 (2003).
- [16] S. L. Braunstein and P. van Loock, Quantum information with continuous variables, *Rev. Mod. Phys.* 77, 513 (2005).
- [17] G. Adesso and F. Illuminati, Entanglement in continuous-variable systems: recent advances and current perspectives, *J. Phys. A: Math. Theor.* 40 7821 (2007).