# Ресурсная теория квантовой негауссовости и вигнеровской отрицательности.

Francesco Albarelli, Marco G. Genoni, and Matteo G. A. Paris

**Resource theory of quantum non-Gaussianity and Wigner negativity**

Phys. Rev. A **98**, 052350 (2018)

## Операции

### Гауссовы операции

Описываются гамильтонианом не выше второй степени.

### Негауссовы операции

Описываются гамильтонианом третьей степени и выше.

## Состояния

### Гауссовы состояния

Полностью характеризоваться первым и вторым моментами квадратурных операторов.

### Негауссовы состояния

#### “Классические” негауссовы состояния

Могут быть подготовлены путем применения комбинации гауссовских операций.

#### Квантовые негауссовы состояния

Для их приготовления обязательно наличие негауссовой операции.

# Ресурсная теория

## Свободные операции

Набор операций, считающийся легкодоступными в рассматриваемых условиях

## Состояния

### Свободные состояния

Свободные состояния замкнуты под набором свободных операций

### Ресурс

# Свободные операции

Гауссовский протокол это любое отображение из $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ в $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}')$ состоящие из следующих операций:

1) Гауссовский унитар: $\rho \to U_G \, \rho \, U_G^\dagger$

2) Смешение с чистым гауссовым состоянием: $\rho \to \rho \otimes |\psi_G\rangle\langle\psi_G|$

3) Чистые гауссовы измерения над подсистемой: $\rho \to \mathrm{Tr}_S[\rho \, \mathbb{1} \otimes |\psi_G(\boldsymbol{\alpha})\rangle\langle\psi_G(\boldsymbol{\alpha})|]/p(\boldsymbol{\alpha}|\rho)$ , с плотностью вероятности $p(\boldsymbol{\alpha}|\rho) = \mathrm{Tr}[\rho \, \mathbb{1} \otimes |\psi_G(\boldsymbol{\alpha})\rangle\langle\psi_G(\boldsymbol{\alpha})|]$, где $\boldsymbol{\alpha}$ - вектор непрерывных измерений в области реальных значений.

4) Частичный след по подсистеме: $\rho \to \mathrm{Tr}_S[\rho]$

5) Квантовые операчии, обусловленные классической случайностью:

   а) Результаты измерений единственны (идеальный случай)

   б) Результаты измерений попадают в интервал конечного размера (рабочий случай)

Где $|\psi_G\rangle$ чистое гауссово состояние, с гауссовым унитаром $U_G$ , а $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ - набор операторов плотности в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ произвольной (конечной) размерности.

# Свободные состояния

1) Максимальный набор состояний, который может быть сгенерирован с помощью гауссовых протоколов:

$$\mathcal{G} = \left\{ \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \mid \rho = \int d\boldsymbol{\lambda}\, p(\boldsymbol{\lambda}) |\psi_G(\boldsymbol{\lambda})\rangle\langle\psi_G(\boldsymbol{\lambda})| \right\}$$

где $p(\boldsymbol{\lambda})$ - произвольное распределение вероятностей.

2) Состояния с положительной функцией Вигнера:

$$\mathcal{W}_+ = \{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \mid W_\rho(\boldsymbol{r}) \geqslant 0\}$$

где $W_\rho$ - функция Вигнера состояния $\rho$.

При этом $\mathcal{G} \subset \mathcal{W}_+$.

# Монотоны

Монотон для квантовой негауссовости (отрицательности Вигнера) - это функционал от набора квантовых состояний до неотрицательных действительных чисел $\mathcal{M} : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \to [0, \infty)$, который удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\mathcal{M}(\rho) = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{G}\,(\mathcal{W}_+)$

2) Монотонность при детерминированных гауссовских протоколах.
Для любого сохраняющего след гауссовского протокола $\Lambda_{\mathrm{DGP}}$ монотон не должен увеличиваться: $\mathcal{M}(\rho) \geqslant \mathcal{M}(\Lambda_{\mathrm{DGP}}(\rho))$

3) Монотонность в среднем по вероятностным гауссовским протоколам.
Имея сохраняющий след гауссовский протокол $\Lambda_{\mathrm{DGP}}$, мы можем выразить его действие в терминах свободных операторов Крауса, мы требуем, чтобы монотонность не увеличивалась в среднем.

а) Идеальный случай: $\Lambda_{\mathrm{DGP}}(\rho) = \int d\boldsymbol{\lambda}\, p(\boldsymbol{\lambda}|\rho)\sigma_{\boldsymbol{\lambda}}$, где $\sigma_{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{p(\boldsymbol{\lambda}|\rho)} K_{\boldsymbol{\lambda}} \rho K_{\boldsymbol{\lambda}}^{\dagger}$. Мы требуем, чтобы

$$\mathcal{M}(\rho) \geqslant \int d\boldsymbol{\lambda}\, p(\boldsymbol{\lambda}|\rho)\mathcal{M}(\sigma_{\boldsymbol{\lambda}})$$

б) Рабочий случай: $\Lambda_{\mathrm{DGP}}(\rho) = \sum_i p_{i|\rho}\sigma_i$, где $\sigma_i = \frac{1}{p_{i|\rho}} K_i \rho K_i^{\dagger}$. Мы требуем, чтобы

$$\mathcal{M}(\rho) \geqslant \sum_i p_{i|\rho}\mathcal{M}(\sigma_i)$$

1) Логарифмическая отрицательность Вигнера:

$$\mathsf{W}(\rho) = \log\left(\int d\boldsymbol{r}\, |W_\rho(\boldsymbol{r})|\right)$$

где интеграл пробегает все фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n}$, где n - количество мод.

2) Квантово негауссовый монотон.

Относительная энтропия для чистых гауссовых состояний

$$\delta[|\psi\rangle] = S(\rho||\tau_G) = S(\tau_G)$$

$S(\rho||\sigma) = \mathrm{Tr}[\rho(\log\rho - \log\sigma)]$ - квантовая относительная энтропия, $S(\rho) = \mathrm{Tr}(\rho\log\rho)$ - энтропия фон Неймана, а $\tau_G$ - эталонное гауссовское состояние, имеющее ту же ковариационную матрицу, что и $|\psi\rangle$.

Монотон для квантовой негауссовости на основе относительной энтропии

$$\delta_{\mathrm{CR}}[\rho] = \inf_{p_i, |\psi_i\rangle} \sum_i p_i \delta[|\psi_i\rangle]$$

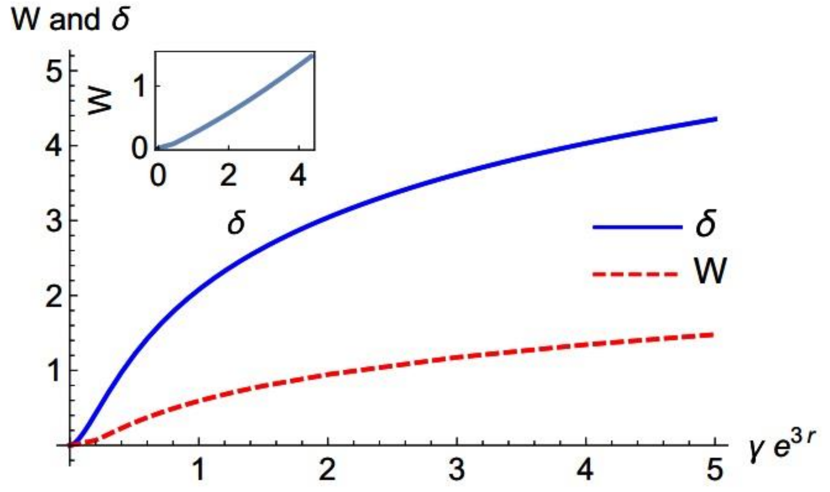
где $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

# Ресурсный анализ классов чистых состояний

1) Состояния кубической фазы: $|\gamma, r\rangle = \exp[i\gamma\hat{x}^3]\hat{S}(r)|0\rangle$

где $\hat{S}(r)$ - оператор сжатия.

Негауссовость (синяя сплошная) и логарифмическая отрицательность Вигнера (красная штрихованая) для состояния кубической фазы как функции их общего параметра.
Вставка: график пропорциональности двух монотонов.

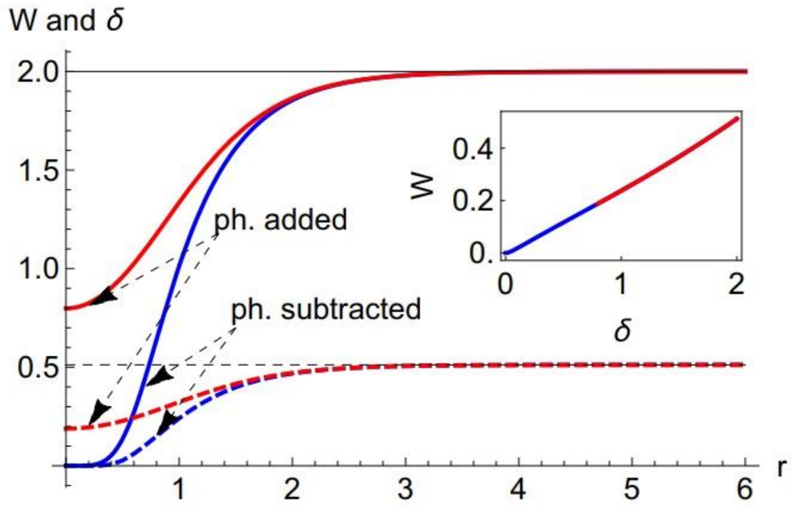



2) Состояния с вычитанием и добавлением фотонов:

$$|\alpha, r\rangle_{\text{sub}} = N_{\text{sub}}^{-1/2}\,\hat{a}D(\alpha)S(r)|0\rangle \quad \text{и} \quad |\alpha, r\rangle_{\text{add}} = N_{\text{add}}^{-1/2}\,\hat{a}^{\dagger}D(\alpha)S(r)|0\rangle$$

где $N_{\text{add}} = 1 + \sinh^2 r + |\alpha|^2, \quad N_{\text{sub}} = \sinh^2 r + |\alpha|^2.$

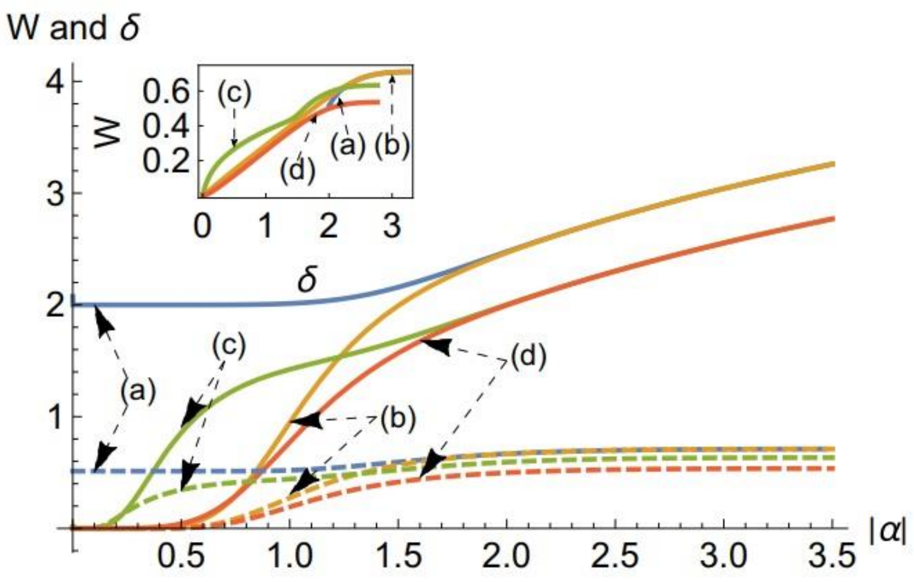
Негауссовость (сплошные) и логарифмическая отрицательность Вигнера (пунктирные) для состояний вычитания фотонов (синие) и добавленных фотонов (красные) как функция от r для фиксированного |α| = 1.
Врезка: график пропорциональности двух монотонов.



3) Состояние кошки: $|\psi(\alpha,\phi,\theta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{K}}(\cos\phi|\alpha\rangle + \sin\phi e^{i\theta}|-\alpha\rangle),$

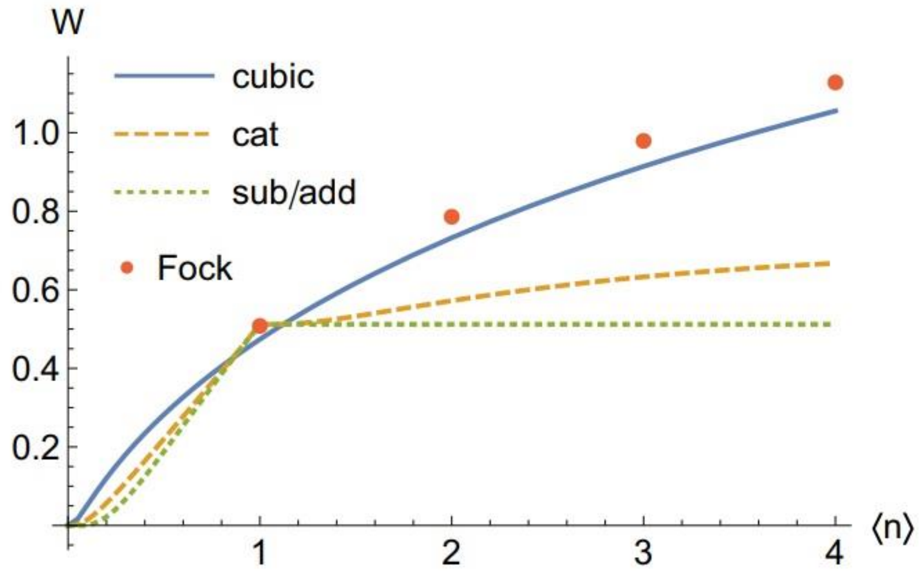
где $K = 1 + \sin(2\phi)\cos\theta e^{-2|\alpha|^2}$

Негауссовость (сплошные линии) и логарифмическая отрицательность Вигнера (пунктирные линии) для состояний кота при различных значений параметров в зависимости от |α|.
Значения параметров: (a) φ = π / 4, θ = π, (b) φ = π / 4, θ = 0, (c) φ = π / 8, θ = π, и (d) φ = π / 8, θ = 0.
Вставка: график пропорциональности двух монотонов.




4) Сравнение классов состояний

Максимальное значение логарифмической отрицательности Вигнера как функция среднего числа бозонных возбуждений для рассматриваемых классов состояний, сплошная голубая линия представляет состояние кубической фазы, пунктирная оранжевая линия - состояния кота (с равной амплитудой), а пунктирная зеленая линия представляет состояния с вычитанием и добавлением фотона. Красные точки представляют состояния Фока.



# Спасибо за внимание!