Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Санкт-Петербургский государственный университет"

Физический факультет
Кафедра общей физики I

КУРСОВАЯ РАБОТА
Поглощение света диполем

Студента 3 курса, 319 группы
Романовского Михаила Сергеевича

Направление: 011200 – «Физика»
Основная образовательная программа
«Физика»

Руководитель работы:
Т. Ю. Голубева

Работа защищена с оценкой
«____»   (________________)

«____»   ________________ 2017 г.

________________ /___________ /
подпись   ФИО

Санкт-Петербург
2017 г.

Содержание

1 Введение

В данной работе рассмотрено полуклассическое взаимодействие светового поля с одиночным двухуровневым атомом в дипольном приближении [1]. То есть, поведение атома описывается квантовомеханически, а поле рассматривается как классическая плоская монохроматическая волна, резонансно взаимодействующая с атомом. В такой модели атом представляет собой диполь, колеблющийся в поле классической волны. Данный подход хорошо работает в случае сильных полей, например, генерируемых лазерами.

Двухуровневый атом - это модель атома, который обладает только двумя энергетическими уровнями [2]. Для наших целей эта модель хорошо подходит, так как в случае резонансного взаимодействия атома с монохроматической волной в реальных системах основную роль чаще всего играет именно резонансный переход между двумя энергетическими уровнями из всех.

Дипольное приближение - модель, в которой носители положительного и отрицательного зарядов считаются точечными, а размеры излучающей системы малы по сравнению с расстояниями, на которых рассматривается поле [2]. В нашем случае будут рассматриваться длины волн, характерные для оптического спектра, и атом с боровским радиусом. Эти условия и позволяют использовать дипольное приближение.

Полуклассический подход - модель, в которой к электромагнитному полю используется классический подход, а сама частица, взаимодействующая с полем, рассматривается с квантовой точки зрения. В случае сильных полей такая модель даёт хорошие результаты. Причина этого лежит в принципе соответствия [3].

Показано, что поток энергии поглощаемого атомом излучения больше, чем поток энергии свободного поля, проходящий через площадку, равную геометрическому поперечному сечению атома.

2 Двухуровневый атом

Запишем вектор состояния двухуровневого атома в виде линейной суперпозиции векторов $|\psi_1(r)\rangle$ и $|\psi_2(r)\rangle$ с амплитудами вероятности $C_1(t), C_2(t)$ [4]:

$$|\psi(r,t)\rangle = C_1(t)\,|\psi_1(r)\rangle + C_2(t)\,|\psi_2(r)\rangle\,. \tag{1}$$

$$|C_1(t)| + |C_2(t)| = 1 \tag{2}$$

$$\langle\psi_i\,|\,\psi_j\rangle = \delta_{ij} \tag{3}$$

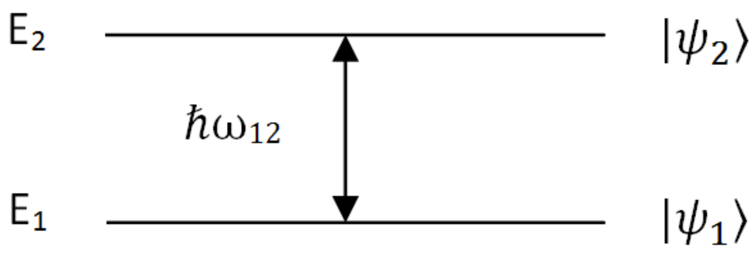

Рис. 1: Схема уровней энергии двухуровневого атома.

В дальнейшем мы не будем указывать зависимость векторов состояния от координаты по двум причинам. Во-первых, нас интересует поведение волнового вектора во времени.

Во-вторых, координатная составляющая здесь входит только в векторы, соответствующие энергетическим уровням, и не влияет на процессы перехода с одного уровня на другой.

В поле классической волны оператор энергии $\hat{H}$ принимает вид [5]:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \tag{4}$$

где $\hat{H}_0$ - оператор энергии для атома вне поля, $\hat{V}$ - оператор взаимодействия атома с полем.

Рассмотрим отдельно каждую компоненту $\hat{H}$. Для оператора $\hat{H}_0$ справедливо уравнение на собственные значения:

$$\hat{H}_0 \left|\psi_i\right\rangle = E_i \left|\psi_i\right\rangle, \tag{5}$$

где E_i - энергия соответствующего уровня i, i принимает значения 1 и 2, $E_i = \hbar\omega_i$, ω_i - частота, соответствующая i-му уровню энергии.

Введём единичный оператор $\hat{I}$ [6]:

$$\sum_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| = \hat{I}. \tag{6}$$

Этот оператор на любой вектор состояния действует следующим образом:

$$\hat{I} \left|\psi\right\rangle = \left|\psi\right\rangle. \tag{7}$$

Подействуем оператором $\hat{I}$ на оператор $\hat{H}_0$ слева и справа:

$$\hat{H}_0 = \sum_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| \hat{H}_0 \sum_j \left|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right| = \sum_{i,j} \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| \hat{H}_0 \left|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right|, \tag{8}$$

где $i, j = 1, 2$.

Воспользуемся формулой (5) и перенесём E_j в конец выражения:

$$\sum_{i,j} \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| \hat{H}_0 \left|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right| = \sum_{i,j} \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i \,|\, \psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right| E_j. \tag{9}$$

В силу ортонормированности базисных векторов 3:

$$\sum_{i,j} \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i \,|\, \psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right| E_j = \sum_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| E_i, \tag{10}$$

$$\sum_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| E_i = \hbar\omega_1 \left|\psi_1\right\rangle \left\langle\psi_1\right| + \hbar\omega_2 \left|\psi_2\right\rangle \left\langle\psi_2\right|. \tag{11}$$

Далее рассмотрим оператор $\hat{V}$ в дипольном приближении [5]:

$$\hat{V} = \hat{d}\mathcal{E}, \tag{12}$$

где $\mathcal{E} = \mathcal{E}_o \cos\omega t$ – напряжённость поля классической волны, $\hat{d} = -e\hat{r}$ – оператор дипольного момента атомного перехода.

Подействуем оператором $\hat{I}$ на оператор $\hat{V}$ слева и справа:

$$\hat{V} = -\sum_{i,j} \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_j\right| e\hat{r} \left|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right| \mathcal{E}(t). \tag{13}$$

Проведём промежуточные вычисления и найдём вид оператора $\hat{d}$ в матричном представлении:

$$d_{ij} = \left\langle\psi_i\right| e\hat{r} \left|\psi_j\right\rangle \tag{14}$$

$$\hat{d} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Вычислим матричные элементы d_{11} и d_{12}:

$$\langle\psi_1| e\hat{r} |\psi_1\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*(r) e\hat{r}\psi_1(r)dr = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_1(r)|^2 erdr = 0, \tag{16}$$

$$\langle\psi_1| e\hat{r} |\psi_2\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*(r) e\hat{r}\psi_2(r)dr \neq 0. \tag{17}$$

Выражение (16) справедливо в силу того, что под интегралом стоит произведение чётной и нечётной функции, а сам интеграл берётся по симметричному промежутку. Выражение (17), напротив, содержит произведение двух нечётных функций и одной чётной, и он также берётся по симметричному промежутку, поэтому он не равен нулю.

В силу эрмитовости оператора $\hat{d}$ можно утверждать, что $d_{ij} = d_{ji}^*$, а так как матричные элементы оператора $\hat{d}$ - наблюдаемые, то и $d_{ij} = d_{ji}^* = d_{ji}$.

После промежуточных вычислений получим:

$$\hat{V} = -\left(|\psi_1\rangle \langle\psi_2| d_{12} + |\psi_2\rangle \langle\psi_1| d_{21}\right) \mathcal{E}(t). \tag{18}$$

Мы получили вид всех интересующих нас операторов. Теперь рассмотрим, как будут развиваться амплитуды вероятности с течением времени. Для этого мы используем нестационарное уравнение Шрёдингера.

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H} |\psi(t)\rangle. \tag{19}$$

Ещё раз запишем выражение для вектора состояния и продифференцируем его по времени:

$$|\psi(t)\rangle = C_1(t) |\psi_1\rangle + C_2(t) |\psi_2\rangle, \tag{20}$$

$$|\psi(\dot{t})\rangle = \dot{C}_1(t) |\psi_1\rangle + \dot{C}_2(t) |\psi_2\rangle. \tag{21}$$

Подставим всё в нестационарное уравнение Шрёдингера:

$$\dot{C}_1(t) |\psi_1\rangle + \dot{C}_2(t) |\psi_2\rangle = -\frac{i}{\hbar}(\hbar\omega_1 |\psi_1\rangle \langle\psi_1| + \hbar\omega_2 |\psi_2\rangle \langle\psi_2| - \tag{22}$$

$$- |\psi_1\rangle \langle\psi_2| d_{12}\mathcal{E}(t) - |\psi_2\rangle \langle\psi_1| d_{21}\mathcal{E}(t)) \left(C_1(t) |\psi_1\rangle + C_2(t) |\psi_2\rangle\right) = \tag{23}$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\left(\hbar\omega_1 C_1(t) |\psi_1\rangle + \hbar\omega_2 C_2(t) |\psi_2\rangle - d_{12}\mathcal{E}C_2(t) |\psi_1\rangle - d_{21}\mathcal{E}C_1(t) |\psi_2\rangle\right). \tag{24}$$

Введём частоту Раби $\Omega = \frac{d_{12}\mathcal{E}_0}{\hbar}$. Заметим, что $d_{12} = d_{21} = {d_{12}}^*$. Раскроем скобки:

$$\dot{C}_1(t) |\psi_1\rangle + \dot{C}_2(t) |\psi_2\rangle = -i\omega_1 C_1(t) |\psi_1\rangle - i\omega_2 C_2(t) |\psi_2\rangle + i\Omega C_2(t) |\psi_1\rangle \cos\omega t + i\Omega C_1(t) |\psi_2\rangle \cos\omega t. \tag{25}$$

Так как $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ - отрогональные вектора, мы можем разделить уравнения:

$$\dot{C}_1 = -i\omega_1 C_1 + i\Omega C_2 \cos\omega t \tag{26}$$

$$\dot{C}_2 = -i\omega_2 C_2 + i\Omega C_1 \cos\omega t \tag{27}$$

Перейдём к медленно меняющимся амплитудам $a_i(t) = C_i(t)e^{i\omega_i t}$:

$$C_1 = a_1 e^{-i\omega_1 t} => \dot{C}_1 = \dot{a}_1 e^{-i\omega_1 t} - a_1 i\omega_1 e^{-i\omega_1 t} \tag{28}$$

$$C_2 = a_2 e^{-i\omega_2 t} => \dot{C}_2 = \dot{a}_2 e^{-i\omega_2 t} - a_2 i\omega_2 e^{-i\omega_2 t} \tag{29}$$

Также, используя

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right), \tag{30}$$

перепишем уравнение (26) в виде:

$$\dot{a}_1 e^{-i\omega_1 t} - i\omega_1 a_1 e^{-i\omega_1 t} = -i\omega_1 a_1 e^{-i\omega_1 t} + i\Omega a_2 e^{-i\omega_2 t}\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right). \tag{31}$$

После упрощения получим:

$$\dot{a}_1 = i\Omega a_2 e^{-i(\omega_2-\omega_1)t}\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right). \tag{32}$$

Введём частоту атомного перехода $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$:

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2} i\Omega a_2 \left(e^{-i(\omega_{21}-\omega)t} + e^{-i(\omega_{21}+\omega)t}\right). \tag{33}$$

Избавимся от быстроосциллирующей компоненты $e^{-i(\omega_{21}+\omega)t}$. Используем резонансное приближение $\omega_{21} = \omega$ и в итоге получим:

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2} i\Omega a_2. \tag{34}$$

Аналогично рассматривая уравнение для $\dot{C}_2(t)$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = i\frac{\Omega}{2} a_2 \\ \dot{a}_2 = i\frac{\Omega}{2} a_1 \end{cases} \tag{35}$$

Рассмотрим уравнеие на $\dot{a}_1$:

$$a_2 = -\frac{2i}{\Omega}\dot{a}_1 => \dot{a}_2 = -\frac{2i}{\Omega}\ddot{a}_1, \tag{36}$$

$$-\frac{2i}{\Omega}\ddot{a}_1 = i\frac{\Omega}{2} a_1, \tag{37}$$

$$\ddot{a}_1 = \frac{i^2}{4}|\Omega|^2 a_1. \tag{38}$$

Будем искать решение уравнения в виде $a_1 = e^{\lambda t}$, где λ - комплексная постоянная:

$$a_1 = e^{\lambda t} \quad => \quad \lambda^2 = \frac{i^2}{4}|\Omega|^2 \tag{39}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{i}{2}\Omega \tag{40}$$

Очевидно, что a_1 имеет следующее общее решение:

$$a_1 = b_1 e^{i\frac{\Omega}{2}t} + b_2 e^{-i\frac{\Omega}{2}t}, \tag{41}$$

где b_i - это, вообще говоря, комплексный множитель.

Аналогично найдём решение для a_2:

$$a_2 = b_1^{'} e^{i\frac{\Omega}{2}t} + b_2^{'} e^{-i\frac{\Omega}{2}t}. \tag{42}$$

Заметим, что в начальный момент времени диполь находится в низшем энергетическом состоянии, поэтому справедливы следующие граничные условия:

$$a_1(0) = 1 => b_1 + b_2 = 1 \tag{43}$$

$$a_2(0) = 0 => b_1^{'} = -b_2^{'} \tag{44}$$

Применяя эти граничные условия к выражениям (41) и (42), получим следующие результаты:

$$a_2 = b_1^{'} \left(e^{i\frac{\Omega}{2}t} - e^{-i\frac{\Omega}{2}t} \right) \frac{1}{2i} 2i = 2ib^{'} \sin \frac{\Omega}{2} t \tag{45}$$

$$\dot{a}_2 = i\frac{\Omega}{2} a_1 => a_1 = -\frac{2i}{\Omega} \dot{a}_2 \tag{46}$$

$$a_1 = -\frac{2i}{\Omega} 2ib^{'} \frac{\Omega}{2} \cos \frac{\Omega}{2} t = 2b^{'} \cos \frac{\Omega}{2} t = b^{'} \left(e^{i\frac{\Omega}{2}t} + e^{-i\frac{\Omega}{2}t} \right) \tag{47}$$

$$b^{'} = b_1; b' = b_2 => b_1 = b_2 \tag{48}$$

$$b_1 + b_2 = 2b_1 = 1 \tag{49}$$

$$b_1 = b_2 = b^{'} = \frac{1}{2} \tag{50}$$

Таким образом:

$$\begin{cases} a_1 = \cos \frac{\Omega}{2} t \\ a_2 = i \sin \frac{\Omega}{2} t \end{cases} \tag{51}$$

Вернёмся к вектору состояния, описывающему состояние диполя.

$$|\psi\rangle = C_1 |\psi_1\rangle + C_2 |\psi_2\rangle \tag{52}$$

Определив коэффициенты a_1 и a_2, можно полностью определить вид амплитуд вероятности C_1 и C_2

$$C_1 = a_1 e^{-i\omega_1 t}, \quad C_2 = a_2 e^{-i\omega_2 t} \tag{53}$$

Подставим a_1 и a_2, затем подставим C_1 и C_2 в вектор состояния:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\Omega}{2} t e^{-i\omega_1 t} |\psi_1\rangle + i \sin \frac{\Omega}{2} t e^{-i\omega_2 t} |\psi_2\rangle . \tag{54}$$

3 Средний дипольный момент

Найдём среднее значение оператора $\hat{d}$. Для этого заключим оператор дипольного момента в обкладки вектора состояния $\langle\psi| d |\psi\rangle$. Очевидно, что слагаемые, включающие в себя матричные элементы d_{11} и d_{22} будут равняться нулю, поэтому запишем:

$$\langle d \rangle = i \cos \frac{\Omega}{2} t e^{i\omega_1 t} \sin \frac{\Omega}{2} t e^{-i\omega_2 t} d_{12} - i \sin \frac{\Omega}{2} t e^{i\omega_2 t} \cos \frac{\Omega}{2} t e^{-i\omega_1 t} d_{21} \tag{55}$$

Зная, что $d_{12} = d_{21}$, упростим выражение:

$$\langle d \rangle = d_{12} \frac{i}{2} \sin \Omega t \left(e^{-i\omega_{21} t} - e^{i w_{21} t} \right) \frac{i}{i} = \frac{d_{12}}{2i} \sin \Omega t \left(e^{i\omega_{21} t} - e^{-i w_{21} t} \right) = d_{12} \sin \Omega t \sin \omega_{21} t \tag{56}$$

Итого:

$$\langle d \rangle = d_{12} \sin \Omega t \sin \omega_{21} t. \tag{57}$$

Отсюда понятно, что амплитуда диполя является функцией времени, которая при обычных условиях меняется медленно по сравнению со световыми колебаниями. Действительно, $d(t) = d_{12} \sin \Omega t$ возрастает от начального нулевого значения до максимального значения d_{12}, а затем уменьшается, пока вновь не достигнет нуля. По окончании этого цикла, в момент времени $T = \frac{\pi}{\Omega}$ атом с определённостью находится в вехрнем энергетическом состоянии, то есть переход завершён.

Для наглядности построим графики $d(t), |C_1|^2, |C_2|^2$ от нулевого момента времени до T и нормируем их на единицу. Можно видеть, что действительно амплитуды вероятности для соответствующих энергетических уровней достигают своих максимумов именно в начале либо в конце периода. То есть, энергетический переход действительно завершается в момент достижения нулевого значения дипольного момента.

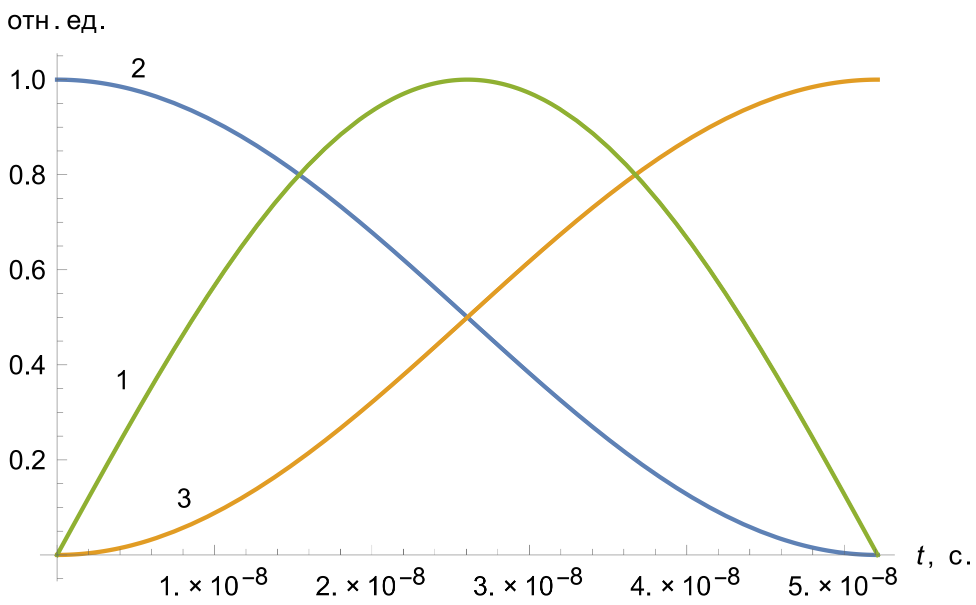

Рис. 2: 1 - амплитуда дипольного момента $d(t)$, отн. ед.; 2 - вероятность нахождения $|C_1|^2$ атома в нижнем энергетическом состоянии E_1, отн. ед.; 3 - вероятность нахождения $|C_2|^2$ атома в верхнем энергетическом состоянии E_2, отн. ед.

4 Энергия, поглощаемая диполем

Легко проверить, что энергия, поглощённая атомом в этом цикле, определяемая как работа, которую поле совершашет над атомом, равна энергии одного фотона $\hbar\omega$

$$\int_0^T E(t)\frac{d}{dt}\langle d(t)\rangle dt = E_0 d_{12}\int_0^T \cos\omega t\frac{d}{dt}\left(\sin\omega t\sin\frac{d_{12}E_0}{\hbar}t\right)dt = \tag{58}$$

$$= E_0 d_{12}\int_0^T \cos\omega t\left(\omega\cos\omega t\sin\Omega t + \Omega\sin\omega t\cos\omega t\right)dt = \tag{59}$$

$$= E_0 d_{12}\int_0^T \left(\omega\cos^2\omega t\sin\Omega t + \Omega\cos\omega t\sin\omega t\cos\Omega t\right)dt \tag{60}$$

Используя интегрирование по частям и теорему о среднем:

$$\int_0^T \Omega\cos\omega t\sin\omega t\cos\Omega t dt = 0. \tag{61}$$

Получим:

$$\int_0^T E(t)\frac{d}{dt}\langle d(t)\rangle dt = E_0 d_{12}\int_0^T \omega\cos^2\omega t\sin\Omega t dt = \frac{1}{2}\omega E_0 d_{12}\int_0^T \sin\Omega t dt = \hbar\omega. \tag{62}$$

5 Поток энергии

Обратим внимание на тот этап процесса поглощения, когда передача энергии максимальна. Это происходит при максимальном значении амплитуды дипольного момента, то есть в момент времени $\frac{T}{2}$. Усреднённый по времени поток энергии, поглощаемый атомом, при $t = \frac{T}{2}$ имеет вид:

$$F = \frac{1}{2}\omega E_0 d_{12}, \tag{63}$$

а усреднённая по времени плотность потока энергии в падающей волне:

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 \tag{64}$$

Введём сечение поглощения σ таким образом, чтобы поток энергии через σ, который задаётся выражением $\sigma\bar{S}$ был равен F.

$$\sigma = \frac{F}{\bar{S}} = \frac{\omega d_{12}}{\varepsilon_0 c E_0} \tag{65}$$

Теперь обратим внимание на T. В данной задаче мы предполагаем, что спонтанное излучение в течение времени перехода T не оказывает значительного действия. Это значит, что

$$T \ll \tau, \tag{66}$$

где τ - среднее время жизни атома в верхнем энергетическом состоянии. Из квантовомеханических соображений можно показать, что [1]:

$$\tau^{-1} = \frac{1}{3\pi\varepsilon_0}\frac{\omega}{\hbar c^3}d_{12}^2, \tag{67}$$

тогда неравенство (66) может быть записано в следующем виде:

$$E_0 \gg \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{\omega^3}{c^3}d_{12}. \tag{68}$$

Путём несложных преобразований из (65) и (68) получим

$$\sigma \gg \frac{3\lambda^2}{4\pi}. \tag{69}$$

Оценим сечение поглощения атома. Для этого возьмём $\sigma = \frac{1}{100\pi}\lambda^2$, $\lambda = 5000\mathring{A}$. Легко видеть, что $\sigma \approx 8 \cdot 10^{-16}$ м^2

В то же время, геометрическое сечение атома, которое можно оценить по формуле $\sigma = \pi r^2$, где r - боровский радиус, примерно равняется $9 \cdot 10^{-21}$ м^2

Очевидно, что сечение поглощения действительно много больше, чем геометрическое сечение атома.

6 Вывод

В ходе данной работы была рассмотрена полукласическая модель атома в дипольном приближении, взаимодействующего с сильным световым полем. Было получено сравнение сечения поглощения атома и его геометрического сечения.

Хотя, на первый взгляд, полученные результаты кажутся парадоксальными, они вполне легко объясняются в рамках всё той же полуклассической модели. Для этого всего лишь надо учесть волну, которую испускает диполь, колеблясь под действием внешнего поля. Интерференция падающей и испускаемой волн существенным образом увеличивает плотность потока энергии электромагнитного поля вблизи диполя.

Один из основных вариантов развития данной работы - это рассмотрение нерезонансного случая и изучение зависимости сечения поглощения от расстройки резонанса, рассмотрение предельных случаев для длинных и коротких волн.

Необходимо заметить, что хотя сечение поглощения квадратично зависит от длины волны поля, это не значит, что у любого вещества сечение поглощения также будет квадратично расти с увеличением длины волны. В данной работе рассматривается только резонансный случай.

Список литературы

[1] Х. Пауль, Р. Фишер. Поглощение света диполем. УФН, том 141, вып. 2. Пер. В.Г. Терзиева, 1983 г.

[2] Гайнутдинов Р.Х., Калачев А.А., Мутыгуллина А.А., Хамадеев М.А., Салахов М.Х. Взаимодействие атомов с полем лазерного излучения и резонансная флуоресценция. Учебно-методическое пособие (2013).

[3] Бете Г. Квантовая механика. М. и Л.: Мир, 1965 г. - 333 с.

[4] Скалли М.О., Зубайри М.С. Квантовая оптика. Пер. с англ. А.А. Калачёва, Т.Г. Митрофановой, В.В. Самарцева, Р.Н. Шахмуратова. Под ред. В.В. Самарцева. М.: Физматлит, 2003 г. - 510 с.

[5] Л. Аллен, Дж. Эберли. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. Пер. с англ. Т.М. Ильиновой и М.С. Стрижевской. Под ред. В.Л. Стрижевского. М.: Мир, 1978 г. - 221 с.

[6] П. Дирак. Принципы квантовой механики. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. - 480 с.