

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»

**БАЕВА Александра Вячеславовна**

**Выпускная квалификационная работа**

**КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЛАЗЕРНЫХ СОЛИТОНОВ**

Уровень образования: магистратура

Направление: 03.04.02 "Физика"

Основная образовательная программа: ВМ.5511.2019 "Физика"

Научный руководитель:  
профессор, кафедра Общей физики I,  
д.ф.-м.н., профессор **Голубев Ю.М.**

Рецензент:  
научный сотрудник, кафедра оптики,  
Университет Палацкого,  
к.ф.-м.н. **Манухова А.Д.**

Санкт-Петербург

2021

# Аннотация

Представленная выпускная квалификационная работа посвящена построению квантовой теории оптических солитонов, формирующихся в лазере с насыщающимся поглощением. В работе детально обсуждаются вопросы линеаризации уравнения Гейзенберга-Ланжевена для амплитуды поля лазерного солитона. Показано, что для получения аналитических решений задачи необходимо следить не за флуктуациями амплитуды поля генерации, но за флуктуациями числа фотонов, формирующих солитон. Следить за квантово-статистическими свойствами поля солитона предложено в схеме балансного гомодинного детектирования. Получены и проанализированы спектры флуктуаций фототока от различных пространственных областей солитона.

# Оглавление

Введение . . . . .	4
<b>1 Модель лазерного солитона . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1 Схема формирования солитона в лазере с насыщающимся поглощением . . .	6
1.1.1 Уравнение Гейзенберга-Ланжевена для амплитуды поля лазерного солитона . . . . .	7
1.1.2 Ланжевеновские источники шумов . . . . .	8
1.2 Линеаризация основного уравнения на фоне классического солитонного решения . . . . .	8
1.3 Уравнение для классического лазерного солитона . . . . .	11
1.4 Линейное уравнение для квантовых флуктуаций поля солитона в режиме стационарной генерации . . . . .	12
<b>2 Детектирование лазерного солитона . . . . .</b>	<b>14</b>
2.1 Уравнения для квадратурных компонент поля . . . . .	14
2.2 Спектральные плотности квадратурных компонент поля . . . . .	15
2.3 Фотодетектирование солитона . . . . .	17
2.4 Спектр флуктуаций фототока . . . . .	19
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>Приложение А Уравнения Гейзенберга-Ланжевена для атомных сред и поля солитона . . . . .</b>	<b>25</b>

# Введение

В последние годы значительно вырос интерес к лазерным солитонам как к перспективным объектам для различных информационно-коммуникационных приложений. Ещё в 1973 году Хасегавой и Таппертом была описана возможность передачи информации по оптическим каналам связи при помощи не расплывающихся при распространении лазерных импульсов [1]. Позднее, с развитием классической теории, были представлены идеи создания полностью оптических логических элементов на основе взаимодействующих между собой солитонов, локализованных во времени [2] и в пространстве [3–8].

Диссипативные лазерные солитоны, локализованные структуры светового поля, которые образуются вследствие баланса притока и оттока энергии в нелинейной среде [9], обладают повышенной устойчивостью. Они могут существовать в течение продолжительного времени при неизменных начальных параметрах схемы формирования солитона. При взаимодействии друг с другом структуры проявляют свойства квазичастиц, а управлять ими относительно легко, например изменяя фазу излучения. Всё это делает диссипативные солитоны удобными объектами не только для передачи классической, но и квантовой информации, и для квантовых вычислений. Однако область применения протоколов может быть ограничена квантовыми свойствами солитонов, которые необходимо исследовать.

Квантовые флуктуации поля солитона, в отличие от технических или тепловых, являются принципиально неустранимыми. Однако в работах [10, 11] для консервативных временных солитонов и [12, 13] для пространственных солитонов в оптоволокне, являющихся решениями нелинейного уравнения Шрёдингера, показано, что можно получать так называемые сжатые состояния, для которых уровень шумов по одной из канонических переменных поля оказывается меньшим, чем для поля в когерентном состоянии. Исследования квантовых эффектов для диссипативных солитонов в оптическом параметрическом генераторе были представлены в работах [14, 15]. Для временных солитонов сжатые по числу фотонов состояния поля наблюдались экспериментально в работах [16–18].

Данная работа является продолжением серии работ [19–21], в которых мы строим квантовую теорию диссипативных пространственных оптических солитонов, формирующихся в широкоапертурном лазере с насыщающимся поглощением. Здесь мы кратко напомним, как было получено замкнутое уравнение для  $s$ -числовой лазерной амплитуды поля  $a(\vec{\rho}, t)$  в адиабатическом приближении, которое описывает формирование солитона

и его квантово-статистические свойства. Чтобы найти аналитические решения основного уравнения мы обсудим вопрос его линеаризации. Мы покажем, что распространённый подход к линеаризации уравнения на фоне классического решения здесь не является удачным, а именно не приводит к аналитическому решению из-за характера нелинейности задачи.

Основываясь на методах и подходах, используемых при рассмотрении лазерных задач, мы предложим второй метод линеаризации, который приведёт к искомым аналитическим решениям. Также мы проследим за квантово-статистическими свойствами лазерного солитона в схеме балансного гомодинного детектирования, получим и проанализируем спектр флуктуаций фототока, в котором мы ожидаем наблюдать подавление дробового шума.

# Глава 1

## Модель лазерного солитона

### 1.1. Схема формирования солитона в лазере с насыщающимся поглощением

Существует несколько вариантов схем, в которых может быть образован пространственный диссипативный оптический солитон. Мы будем строить наши рассуждения для солитона, который формируется в высокочастотном оптическом резонаторе бегущей волны, заполненном двумя различными двухуровневыми средами (Рис. 1.1).

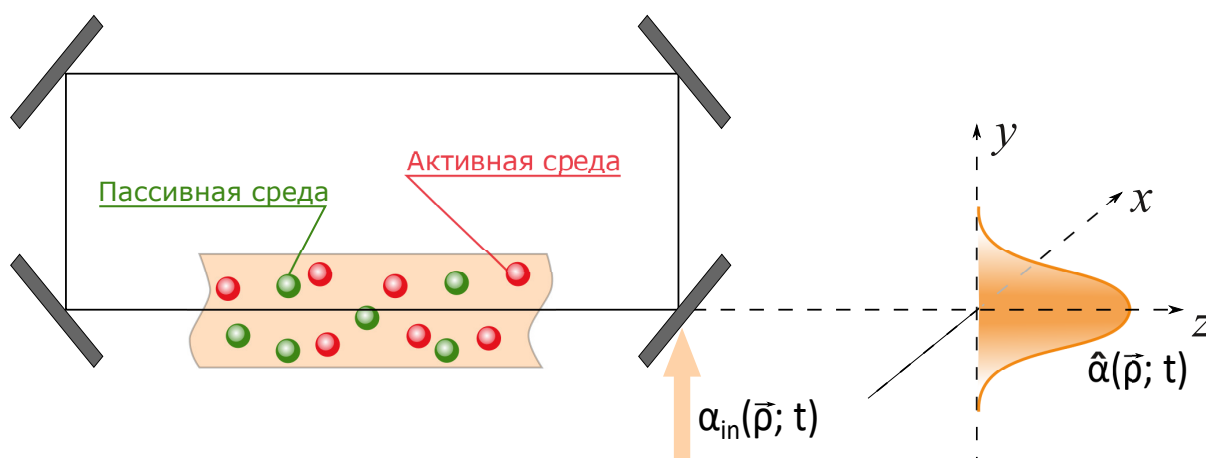


Рис. 1.1: Формирование лазерного солитона в резонаторе бегущей волны.

Одна из этих сред, активная, осуществляет лазерную генерацию, а вторая, пассивная, обеспечивает насыщенное поглощение лазерного поля. Энергетическая схема уровней для обеих сред представлена на рис. 1.2. Поясним используемые обозначения.  $R_a$  – средняя скорость возбуждения верхнего уровня активной среды,  $R_p$  – средняя скорость возбуждения нижнего уровня пассивной среды. Константы  $\Gamma_j$ ,  $\gamma_j$  – скорости спонтанного распада  $j$ -го уровня активной и пассивной сред соответственно, где  $j = 1, 2$ . При решении задачи мы предполагаем, что для скоростей распада уровней выполняются следующие условия:

$\Gamma_2 \ll \Gamma_1$  и  $\gamma_2 \gg \gamma_1$ . Обе среды взаимодействуют с одной и той же модой оптического резонатора  $\hat{a}$  и находятся в строгом резонансе с ней.

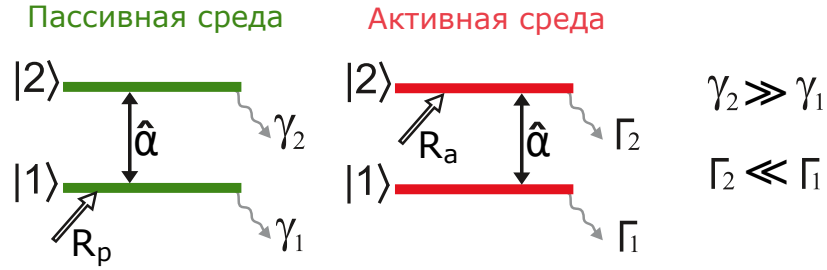


Рис. 1.2: Энергетическая схема уровней.

Объём оптического резонатора определяется формулой  $V = ll_x l_y$ , причём соотношение сторон выбирается таким, чтобы длина резонатора  $l$  была много меньше его поперечных размеров  $l_x$  и  $l_y$ . Это необходимо для того, чтобы пренебречь краевыми эффектами от зеркал. Направление оси  $z$  соответствует направлению обхода резонатора.

В формировании пространственного лазерного солитона важную роль играют поперечные квазинепрерывные моды. Мы предполагаем, что из всех продольных мод (вдоль оси  $z$ ) возбуждается только одна, а распределение светового поля в плоскости  $x0y$  будем описывать при помощи вектора  $\vec{\rho} = (x, y)$ . Решая задачу в рамках гейзенбергового подхода мы можем представить поле лазерного солитона гейзенберговой  $s$ -числовой амплитудой  $a(\vec{\rho}, t)$ , зависящей как от временной, так и от пространственных координат.

### 1.1.1. Уравнение Гейзенберга-Ланжевена для амплитуды поля лазерного солитона

Получение  $s$ -числового уравнения Гейзенберга-Ланжевена для поля лазерного солитона в адиабатическом приближении подробно обсуждалось в работах [19, 20] и приведено в приложении А. При построении данного уравнения из рассмотрения были исключены атомные переменные, развитие которых происходит значительно быстрее, чем переменной поля. Таким образом, для огибающей поля лазерного солитона получено замкнутое уравнение в частных производных

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{ic}{2k_0} \Delta_{\perp} \right] a(\vec{\rho}, t) = -\frac{\kappa}{2} [a(\vec{\rho}, t) - a_{in}(\vec{\rho}, t)e^{-iv_{int}t}] + \frac{1}{2} \left[ \frac{A_a}{1 + \beta_a |a(\vec{\rho}, t)|^2} - \frac{A_p}{1 + \beta_p |a(\vec{\rho}, t)|^2} \right] a(\vec{\rho}, t) + e^{-iv_{int}t} \Phi(\vec{\rho}, t). \quad (1.1)$$

Здесь  $c$  – скорость света,  $k_0$  – волновое число лазерной моды,  $\kappa$  – спектральная ширина лазерной моды.  $A_a = \beta_a R_a$ ,  $A_p = \beta_p R_p$  – линейные коэффициенты усиления активной и поглощения пассивной сред соответственно. Коэффициенты  $\beta_a, \beta_p$  характеризуют насы-

щающие свойства соответствующей среды. Величиной  $\Phi(\vec{\rho}, t) = \Phi_a(\vec{\rho}, t) + \Phi_p(\vec{\rho}, t)$  задаётся сумма ланжевеновских шумовых источников активной и пассивной атомных сред.

Захват фазы солитона и его устойчивость обеспечивает присутствующее в системе слабое внешнее лазерное поле  $a_{in}(\vec{\rho}, t)$ , отстроенное от модовой частоты лазера на величину  $\nu_{in}$ . Амплитуды лазерных полей можно представить также в виде  $a_{in} = \sqrt{n_{in}}e^{i\varphi_{in}}$  и  $a = \sqrt{n}e^{i\varphi}$ , где величины  $n_{in}$ ,  $n$  определяют число фотонов в моде поля, а  $\varphi$  и  $\varphi_{in}$  - фазу. Для синхронизации излучения достаточно, чтобы величина  $\mu = \sqrt{n_{in}/n}$  оставалась малой.

### 1.1.2. Ланжевеновские источники шумов

Ланжевеновские источники шумов активной и пассивной атомных сред, входящие в основное уравнение, полностью описываются нулевыми средними и следующими корреляционными функциями второго порядка:

$$\langle \Phi_a^2 \rangle = -\frac{1}{2} \left( \frac{\beta_a a(\vec{\rho}, t)}{1 + \beta_a |a(\vec{\rho}, t)|^2} \right)^2 R_a \left( 1 + \frac{s_a}{2} \right), \quad (1.2)$$

$$\langle |\Phi_a|^2 \rangle = \frac{\beta_a R_a}{1 + \beta_a |a(\vec{\rho}, t)|^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_a |a(\vec{\rho}, t)|}{1 + \beta_a |a(\vec{\rho}, t)|^2} \right)^2 R_a \left( 1 + \frac{s_a}{2} \right), \quad (1.3)$$

$$\langle \Phi_p^2 \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_p a(\vec{\rho}, t)}{1 + \beta_p |a(\vec{\rho}, t)|^2} \right)^2 R_p \left( 1 - \frac{s_p}{2} \right), \quad (1.4)$$

$$\langle |\Phi_p|^2 \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_p |a(\vec{\rho}, t)|}{1 + \beta_p |a(\vec{\rho}, t)|^2} \right)^2 R_p \left( 1 - \frac{s_p}{2} \right). \quad (1.5)$$

Здесь введены параметры  $s_a, s_p$ , определяющие статистику накачки атомных сред. Они могут принимать значения от 0, в случае пуассоновской накачки, до 1, что соответствует случаю регулярной накачки. Таким образом, вклад шумовых источников оказывается напрямую связан со статистическими особенностями накачки атомных сред.

## 1.2. Линеаризация основного уравнения на фоне классического солитонного решения

Основное уравнение (1.1) полностью описывает формирование пространственного лазерного солитона и его квантово-статистические свойства. Однако поиск аналитического решения для данного неоднородного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных оказывается затруднён. При решении подобных задач часто применяют методы линеаризации уравнения.

В этом параграфе мы рассмотрим один из подходов к линеаризации системы, предложенный в статье [22], для схемы формирования пространственного солитона в нелиней-



ном интерферометре. Напомним, что в нашей задаче образование солитона происходит в кольцевом резонаторе.

Мы будем предполагать, что поле солитона можно представить в виде суммы классического солитонного решения и величины, описывающей флуктуаций поля  $a(\vec{\rho}, t) = a_{cl}(\vec{\rho}, t) + \delta a(\vec{\rho}, t)$ . При записи данного равенства мы требуем выполнения условия  $|\delta a(\vec{\rho}, t)| \ll a_{cl}(\vec{\rho}, t)$ , то есть здесь необходимо учитывать только те флуктуации, амплитуда которых мала в сравнении с амплитудой поля солитона. Мы считаем, что появление флуктуаций, для которых данное равенство нарушается, маловероятно, а значит вклад от них в выражение для поля солитона будет малым и мы можем им пренебречь.

С учётом такой линеаризации основное уравнение (1.1) переписется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} a_{cl} + \frac{\partial}{\partial t} \delta a - \frac{ic}{2k_0} \Delta_{\perp} (a_{cl} + \delta a) = & -\frac{\kappa}{2} (a_{cl} + \delta a - a_{in} e^{-i\nu_{int} t}) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{A_a}{1 + \beta_a |a_{cl}|^2} - \frac{A_a \beta_a a_{cl}^* \delta a}{(1 + \beta_a |a_{cl}|^2)^2} - \frac{A_a \beta_a a_{cl} \delta a^*}{(1 + \beta_a |a_{cl}|^2)^2} - \frac{A_p}{1 + \beta_p |a_{cl}|^2} + \right. \\ & \left. + \frac{A_p \beta_p a_{cl}^* \delta a}{(1 + \beta_p |a_{cl}|^2)^2} + \frac{A_p \beta_p a_{cl} \delta a^*}{(1 + \beta_p |a_{cl}|^2)^2} \right) (a_{cl} + \delta a) + e^{-i\nu_{int} t} \Phi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь и далее необходимо помнить, что  $a_{cl} = a_{cl}(\vec{\rho}, t)$ ,  $\delta a = \delta a(\vec{\rho}, t)$ ,  $a_{in} = a_{in}(\vec{\rho}, t)$ ,  $\Phi = \Phi(\vec{\rho}, t)$ . Мы также здесь провели разложение по малому параметру  $\delta a$  и пренебрегли слагаемыми второго порядка малости и выше.

Заметим, что в данном выражении могут быть обнулены слагаемые, которые входят в уравнение для амплитуды поля классического солитона. Его можно получить из основного уравнения (1.1) при условии отсутствия флуктуаций ( $\Phi(\vec{\rho}, t) = 0$ ). Нам будет удобно ввести обозначения  $\tilde{I}_a = \beta_a |a_{cl}|^2$ ,  $\tilde{I}_p = \beta_p |a_{cl}|^2$  для интенсивностей насыщения активной и пассивной сред. С учётом всего вышеперечисленного мы получим уравнение описывающее флуктуации поля лазерного солитона

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta a - \frac{ic}{2k_0} \Delta_{\perp} \delta a = & -\frac{\kappa}{2} \delta a + \frac{1}{2} \left( \frac{A_a}{1 + \tilde{I}_a} \delta a - \frac{A_a}{1 + \tilde{I}_a} \frac{\tilde{I}_a}{1 + \tilde{I}_a} \delta a - \frac{A_a}{1 + \tilde{I}_a} \frac{\beta_a a_{cl}^2}{1 + \tilde{I}_a} \delta a^* - \right. \\ & \left. - \frac{A_p}{1 + \tilde{I}_p} \delta a + \frac{A_p}{1 + \tilde{I}_p} \frac{\tilde{I}_p}{1 + \tilde{I}_p} \delta a + \frac{A_p}{1 + \tilde{I}_p} \frac{\beta_p a_{cl}^2}{1 + \tilde{I}_p} \delta a^* \right) + e^{-i\nu_{int} t} \Phi. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Его можно переписать в матричном виде

$$i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\kappa}{2} \right) \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta a^* \end{pmatrix} + \mathcal{L} \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\nu_{int} t} \Phi \\ e^{i\nu_{int} t} \Phi^* \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

где оператор  $\mathcal{L}$  представлен квадратной матрицей

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{c}{2k_0} \Delta_{\perp} - i\mu & i\nu \\ i\nu^* & -\frac{c}{2k_0} \Delta_{\perp} - i\mu \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Здесь также

$$\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{A_a}{1 + \tilde{I}_a} - \frac{A_a}{1 + \tilde{I}_a} \frac{\tilde{I}_a}{1 + \tilde{I}_a} - \frac{A_p}{1 + \tilde{I}_p} + \frac{A_p}{1 + \tilde{I}_p} \frac{\tilde{I}_p}{1 + \tilde{I}_p} \right), \quad (1.10)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \left( \frac{A_a}{1 + \tilde{I}_a} \frac{\beta_a a_{cl}^2}{1 + \tilde{I}_a} - \frac{A_p}{1 + \tilde{I}_p} \frac{\beta_p a_{cl}^2}{1 + \tilde{I}_p} \right). \quad (1.11)$$

Для поиска решений уравнений подобных (1.8) в статье [22] был предложен метод, основанный на поиске собственных функций и собственных значений дискретного спектра однородного (классического) уравнения. В таком случае общее решение задачи может быть записано в виде разложения по найденным собственным функциям.

Легко заметить, что решение однородного уравнения может быть факторизовано

$$\begin{pmatrix} \delta a \\ \delta a^* \end{pmatrix} = T(t) R(\vec{\rho}) = e^{-(\frac{\kappa}{2} + i\lambda)t} R(\vec{\rho}). \quad (1.12)$$

При этом пространственная функция  $R(\vec{\rho})$  обязана удовлетворять уравнению на собственные значения  $\mathcal{L}R(\vec{\rho}) = -\lambda R(\vec{\rho})$ , а явный вид функции  $T(t) = e^{-(\frac{\kappa}{2} + i\lambda)t}$  нетрудно получить в результате подстановки факторизованного решения в исходное уравнение (1.8).

Анализируя полученный результат мы можем установить, что собственными функциями уравнения (1.8) будут являться как функции сплошного спектра, так и локализованные функции дискретного спектра. При этом очевидно, что одна из функций дискретного спектра с собственным значением  $\lambda = \frac{i\kappa}{2}$ , будет соответствовать стационарному решению.

Для поиска второго собственного значения и второй собственной функции дискретного спектра предлагалось использовать свойства полярного разложения линейного оператора, входящего в уравнение. Известно, что произвольный линейный оператор в унитарном пространстве всегда можно представить в виде произведения двух: эрмитового и унитарного.

В задаче с нелинейным интерферометром при разложении некоторого линейного оператора  $\tilde{\mathcal{L}}$  в качестве унитарного оператора выступила одна из матриц Паули, которые, как известно, вместе с единичной матрицей образуют базис в пространстве эрмитовых матриц  $2 \times 2$ . Это свойство позволило построить уравнение на собственные значения оператора  $\tilde{\mathcal{L}}$  в сопряжённом пространстве и найти вторую собственную функцию дискретного спектра с соответствующим собственным значением.

В нашем случае из-за другого характера нелинейности полученная при полярном разложении оператора  $\mathcal{L}$  унитарная матрица не является одновременно эрмитовой. Это означает, что описываемая нами система не обладает достаточной симметрией для применения предложенного метода и данным способом линеаризации задача оказывается аналитически не разрешима.

В таких ситуациях обычно предлагают либо искать численное решение задачи, что было сделано нами в работе [23] для одномерных пространственных лазерных солитонов, либо искать другие методы линеаризации.

Далее мы представим такой метод линеаризации, при котором получение аналитического решения задачи возможно.

### 1.3. Уравнение для классического лазерного солитона

Обсудим сначала подробно уравнение для амплитуды поля классического лазерного солитона. Как уже упоминалось, его легко получить пренебрегая в основном уравнении (1.1) слагаемым, пропорциональным ланжевенковскому шумовому источнику  $\Phi(\vec{\rho}, t)$ . Напомним, что основное уравнение, описывающее исследуемую лазерную систему, было получено в рамках квантовой электродинамики при адиабатическом исключении атомных переменных.

В классическом пределе уравнение для поля лазерного солитона представлено следующим выражением

$$\frac{\partial a_{cl}}{\partial t} - \frac{ic}{2k_0} \Delta_{\perp} a_{cl} = -\frac{\kappa}{2}(a_{cl} - a_{in}e^{-iv_{in}t}) + \frac{1}{2} \left( \frac{A_a}{1 + \beta_a |a_{cl}|^2} - \frac{A_p}{1 + \beta_p |a_{cl}|^2} \right) a_{cl}. \quad (1.13)$$

Далее нас будут интересовать только те решения, которые соответствуют режиму стационарной генерации, поэтому решение уравнения мы будем искать в виде

$$a_{cl}(\vec{\rho}, t) = \xi(\vec{\rho})e^{-iv_{in}t}. \quad (1.14)$$

Величина  $\xi(\vec{\rho})$ , которую мы будем называть в дальнейшем классическим лазерным солитоном, определяет пространственное распределение поля в режиме стационарной генерации и удовлетворяет уравнению

$$-\frac{ic}{2k_0} \Delta_{\perp} \xi(\vec{\rho}) = -\frac{\kappa}{2} (\xi(\vec{\rho}) - a_{in}) + \frac{1}{2} \left( \frac{A_a}{1 + \beta_a |\xi(\vec{\rho})|^2} - \frac{A_p}{1 + \beta_p |\xi(\vec{\rho})|^2} \right) \xi(\vec{\rho}) + iv_{in} \xi(\vec{\rho}). \quad (1.15)$$

Теперь мы можем определить число фотонов в лазерном солитоне в режиме стационарной генерации. Его можно задать величиной

$$S n_0 = \iint_{(S)} dx dy \xi(\vec{\rho}) \xi^*(\vec{\rho}). \quad (1.16)$$

Здесь  $S$  – площадь поперечного сечения солитона (примем далее  $S = 1$ ), а величина  $n_0$  определяет плотность потока фотонов. Для нас будет принципиально важен тот факт, что величина  $S n_0$  не зависит ни от пространственных координат, ни от времени.

## 1.4. Линейное уравнение для квантовых флуктуаций поля солитона в режиме стационарной генерации

Ранее мы обсуждали, что получение аналитических решений уравнения (1.1) возможно не при каждом методе линеаризации. Наша задача состоит в том, чтобы предложить такую линеаризацию, при которой получение аналитического решения возможно.

Основываясь на опыте решения лазерных задач, мы можем записать выражение для числа фотонов в поле солитона следующим образом

$$|a(\vec{\rho}, t)|^2 = n_0 + \varepsilon(\vec{\rho}, t), \quad (1.17)$$

Данное равенство выполняется только в режиме стационарной генерации. Величина  $\varepsilon(\vec{\rho}, t)$  здесь задаёт малые флуктуации числа фотонов, которые наблюдаются на фоне большого числа фотонов в классическом солитоне, то есть в любой точке пространства выполняется неравенство  $n_0 \gg \varepsilon(\vec{\rho}, t)$ .

Тогда амплитуда поля солитона в режиме стационарной генерации может быть представлена с учётом выражения (1.17), в виде

$$a(\vec{\rho}, t) = \sqrt{n_0} [1 + \delta a(\vec{\rho}, t)] e^{i\varphi_0} e^{-i\nu_{in}t}, \quad (1.18)$$

где  $\sqrt{n_0}e^{i\varphi_0}$  – стационарная амплитуда генерации,  $\delta a(\vec{\rho}, t)$  – величина, описывающая флуктуации поля.

Нетрудно убедиться, что величина  $\varepsilon(\vec{\rho}, t)$  зависит от величины флуктуаций поля солитона и выражается равенством  $\varepsilon(\vec{\rho}, t) = n_0 [\delta a(\vec{\rho}, t) + \delta a^*(\vec{\rho}, t)]$ .

Учитывая полученные выражения для числа фотонов (1.17) и поля лазерного солитона (1.18) в режиме стационарной генерации, основное уравнение (1.1) может быть переписано следующим образом

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{ic}{2k_0} \Delta_{\perp} \right] [\sqrt{n_0}(1 + \delta a)e^{i\varphi_0} e^{-i\nu_{in}t}] = -\frac{1}{2}\kappa [\sqrt{n_0}(1 + \delta a)e^{i\varphi_0} e^{-i\nu_{in}t} - a_{in}e^{-i\nu_{in}t}] + \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{A_a}{1 + \beta_a(n_0 + \varepsilon)} - \frac{A_p}{1 + \beta_p(n_0 + \varepsilon)} \right] \sqrt{n_0}(1 + \delta a)e^{i\varphi_0} e^{-i\nu_{in}t} + \Phi(\vec{\rho}, t)e^{-i\nu_{in}t}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Напомним, что мы определяли амплитуды полей следующим образом  $a_{in} = \sqrt{n_{in}}e^{i\varphi_{in}}$  и  $a = \sqrt{n_0}e^{i\varphi_0}$ , и вводили величину  $\mu = \sqrt{n_{in}/n_0}$ . Тогда избавившись от заведомо нулевых слагаемых и экспоненциальной временной зависимости получим

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{ic}{2k_0} \Delta_{\perp} \right] \delta a(\vec{\rho}, t) = -\frac{1}{2}\kappa [1 + \delta a(\vec{\rho}, t) - \mu e^{i(\varphi_{in} - \varphi_0)}] + \frac{1}{2} \left[ \frac{A_a}{1 + \beta_a(n_0 + \varepsilon)} - \right. \\ \left. - \frac{A_p}{1 + \beta_p(n_0 + \varepsilon)} \right] (1 + \delta a(\vec{\rho}, t)) + i\nu_{in}(1 + \delta a(\vec{\rho}, t)) + \frac{\Phi(\vec{\rho}, t)}{\sqrt{n_0}e^{i\varphi_0}}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Рассмотрим теперь выражение (1.20) в нулевом порядке по квантовым флуктуациям. (В случае, когда  $\delta a(\vec{\rho}, t) = 0$  и  $\Phi(\vec{\rho}, t) = 0$ ).

$$0 = -\frac{1}{2}\kappa [1 - \mu e^{i(\varphi_{in} - \varphi_0)}] + \frac{1}{2} \left[ \frac{A_a}{1 + I_a} - \frac{A_p}{1 + I_p} \right] + i\nu_{in}, \quad (1.21)$$

здесь по аналогии с величинами  $\tilde{I}_a$  и  $\tilde{I}_p$  мы вводим обозначения  $I_a = \beta_a n_0$ ,  $I_p = \beta_p n_0$ . В случае стационарной генерации разность фаз  $\varphi_{in} - \varphi_0$  стремится к 0, поэтому будет верным следующее условие

$$1 - \mu = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{A_a}{1 + I_a} - \frac{A_p}{1 + I_p} \right]. \quad (1.22)$$

В том случае, если мы сохраним в уравнении (1.20) члены первого порядка малости по флуктуациям, то получим

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{ic}{2k_0} \Delta_{\perp} \right] \delta a = -\frac{1}{2}\kappa [1 + \delta a - \mu] + \frac{1}{2} \left[ \frac{A_a}{1 + I_a} - \frac{A_a}{1 + I_a} \frac{I_a}{1 + I_a} (\delta a + \delta a^*) - \frac{A_p}{1 + I_p} + \frac{A_p}{1 + I_p} \frac{I_p}{1 + I_p} (\delta a + \delta a^*) \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{A_a}{1 + I_a} - \frac{A_p}{1 + I_p} \right] \delta a + i\nu_{in}(1 + \delta a) + \frac{\Phi(\vec{\rho}, t)}{\sqrt{n_0} e^{i\varphi_0}}. \quad (1.23)$$

Учитывая выражение (1.21) мы можем записать

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{ic}{2k_0} \Delta_{\perp} \right] \delta a = -\frac{1}{2}\kappa \mu \delta a - \frac{1}{2} D (\delta a + \delta a^*) + \frac{\Phi(\vec{\rho}, t)}{\sqrt{n_0} e^{i\varphi_0}}. \quad (1.24)$$

Здесь для краткой формы записи уравнения мы ввели обозначение

$$D = \frac{A_a}{1 + I_a} \frac{I_a}{1 + I_a} - \frac{A_p}{1 + I_p} \frac{I_p}{1 + I_p}, \quad (1.25)$$

Согласно (1.18) амплитуда флуктуаций поля лазерного солитона задаётся не величиной  $\delta a$ , а  $\delta A = \sqrt{n_0} e^{i\varphi_0} \delta a$ . Тогда конечное уравнение для амплитуды флуктуаций поля солитона будет выглядеть следующим образом

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{ic}{2k_0} \Delta_{\perp} \right] \delta A = -\frac{1}{2}\kappa \mu \delta A - \frac{1}{2} D (\delta A + \delta A^* e^{2i\varphi_0}) + \Phi(\vec{\rho}, t). \quad (1.26)$$

Полученное уравнение – это и есть искомое нами линейное уравнение для флуктуаций поля лазерного солитона. В следующей главе мы найдём решение данного уравнения и представим процедуру измерения поля солитона.

## Глава 2

# Детектирование лазерного солитона

Обсуждение квантово-статистических свойств лазерного света оказывается невозможным без корректно сформулированной измерительной процедуры. В этой главе мы подробно обсудим измерение вышедшего из резонатора поля лазерного солитона в схеме балансного гомодинного детектирования. Данная схема удобна тем, что позволяет напрямую наблюдать за квадратурными компонентами лазерного поля. В предыдущей главе мы получили линеаризованное уравнение для поля лазерного солитона (1.26). Введём теперь понятие квадратурных компонент и получим решение данного уравнения.

### 2.1. Уравнения для квадратурных компонент поля

Нам будет удобно представить амплитуду флуктуаций поля солитона, в виде так называемых квадратурных компонент. Мы введём их следующим образом

$$\delta X(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{2} (\delta A e^{-i\varphi_0} + \delta A^* e^{i\varphi_0}), \quad (2.1)$$

$$\delta Y(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{2i} (\delta A e^{-i\varphi_0} - \delta A^* e^{i\varphi_0}). \quad (2.2)$$

Здесь важно, что  $\delta X(\vec{\rho}, t)$  и  $\delta Y(\vec{\rho}, t)$  являются вещественными функциями.

Тогда вместо одного уравнения (1.26) получим систему уравнений, описывающую флуктуации квадратурных компонент поля. Первое уравнение отвечает вещественной части исходного уравнения, а второе – мнимой.

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta X + \frac{c}{2k_0} \Delta_{\perp} \delta Y = -D\delta x - \frac{1}{2} \kappa \mu \delta X + \Phi_x, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta Y - \frac{c}{2k_0} \Delta_{\perp} \delta X = -\frac{1}{2} \kappa \mu \delta Y + \Phi_y, \quad (2.4)$$

Теперь установим связь между новыми ланжевеновскими источниками  $\Phi_x = \Phi_x(\vec{\rho}, t)$  и  $\Phi_y = \Phi_y(\vec{\rho}, t)$  и шумовыми источниками активной и пассивной атомных сред  $\Phi_a = \Phi_a(\vec{\rho}, t)$  и  $\Phi_p = \Phi_p(\vec{\rho}, t)$ . Напомним, что при выводе основного уравнения

была использована сокращённая форма записи  $\Phi(\vec{\rho}, t) = \Phi_a(\vec{\rho}, t) + \Phi_p(\vec{\rho}, t)$ . Тогда будет выполняться следующее равенство

$$\Phi_x + i\Phi_y = (\Phi_a + \Phi_p)e^{-i\varphi_0}, \quad (2.5)$$

а новые ланжевенские источники будут задаваться выражениями

$$\Phi_x = \frac{1}{2} [e^{-i\varphi_0}\Phi_a + e^{i\varphi_0}\Phi_a^*] + \frac{1}{2} [e^{-i\varphi_0}\Phi_p + e^{i\varphi_0}\Phi_p^*], \quad (2.6)$$

$$\Phi_y = \frac{1}{2i} [e^{-i\varphi_0}\Phi_a - e^{i\varphi_0}\Phi_a^*] + \frac{1}{2i} [e^{-i\varphi_0}\Phi_p - e^{i\varphi_0}\Phi_p^*]. \quad (2.7)$$

## 2.2. Спектральные плотности квадратурных компонент поля

Вернёмся к рассмотрению системы уравнений (2.3),(2.4). Перейдём к спектральному представлению по времени и поперечному пространству при помощи преобразования Фурье согласно определениям

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}, \quad (2.8)$$

$$F(\vec{q}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2\vec{\rho} f(\vec{\rho}) e^{-i\vec{\rho}\vec{q}}. \quad (2.9)$$

Напомним, что  $\vec{\rho} = (x, y)$  – вектор, лежащий в плоскости поперечной направлению распространения лазерного солитона, а вектор  $\vec{q}$  мы вводим следующим образом  $\vec{q} = (q_1, q_2)$ .

Тогда уравнения (2.3), (2.4) будут переписаны следующим образом

$$-i\omega\delta X(\omega, \vec{q}) - \omega_q\delta Y(\omega, \vec{q}) = -D\delta X(\omega, \vec{q}) - \frac{1}{2}\kappa\mu \delta X(\omega, \vec{q}) + \Phi_x(\omega, \vec{q}), \quad (2.10)$$

$$-i\omega\delta Y(\omega, \vec{q}) + \omega_q\delta X(\omega, \vec{q}) = -\frac{1}{2}\kappa\mu \delta Y(\omega, \vec{q}) + \Phi_y(\omega, \vec{q}). \quad (2.11)$$

Здесь мы ввели обозначение для пространственной частоты  $\omega_q = cq^2/(2k_0)$ .

Определим следующим образом константы  $\zeta_1 = D + \frac{1}{2}\kappa\mu$  и  $\zeta_2 = \frac{1}{2}\kappa\mu$ . Тогда с учётом подстановки

$$(\zeta_1 - i\omega)\delta X(\omega, \vec{q}) = \omega_q\delta Y(\omega, \vec{q}) + \Phi_x(\omega, \vec{q}), \quad (2.12)$$

$$(\zeta_2 - i\omega)\delta Y(\omega, \vec{q}) = -\omega_q\delta X(\omega, \vec{q}) + \Phi_y(\omega, \vec{q}), \quad (2.13)$$

Нетрудно получить решение относительно квадратур данной системы алгебраических уравнений.

$$\delta X(\omega, \vec{q}) = \frac{1}{Q_{\omega, \vec{q}}} [(\zeta_2 - i\omega)\Phi_x(\omega, \vec{q}) + \omega_q \Phi_y(\omega, \vec{q})], \quad (2.14)$$

$$\delta Y(\omega, \vec{q}) = \frac{1}{Q_{\omega, \vec{q}}} [-\omega_q \Phi_x(\omega, \vec{q}) + (\zeta_1 - i\omega)\Phi_y(\omega, \vec{q})], \quad (2.15)$$

где  $Q_{\omega, \vec{q}} = (\zeta_1 - i\omega)(\zeta_2 - i\omega) + \omega_q^2$ .

Найденное решение позволяет перейти к обсуждению спектральных плотностей ( $|\delta X(\omega, \vec{q})|^2$ ) и ( $|\delta Y(\omega, \vec{q})|^2$ ). В режиме стационарной генерации спектральные плотности определяются как множители перед дельта-функциями в корреляционных функциях

$$\langle \delta X(\omega, \vec{q}) \delta X(\omega', \vec{q}') \rangle = (|\delta X(\omega, \vec{q})|^2) \delta(\omega + \omega') \delta^2(\vec{q} + \vec{q}'), \quad (2.16)$$

$$\langle \delta Y(\omega, \vec{q}) \delta Y(\omega', \vec{q}') \rangle = (|\delta Y(\omega, \vec{q})|^2) \delta(\omega + \omega') \delta^2(\vec{q} + \vec{q}'). \quad (2.17)$$

Учитывая (2.14) и (2.15) получим

$$(|\delta X(\omega, \vec{q})|^2) = \frac{1}{|Q_{\omega, \vec{q}}|^2} [\omega_q^2 (|\Phi_y(\omega, \vec{q})|^2) + (\zeta_2^2 + \omega^2) (|\Phi_x(\omega, \vec{q})|^2)], \quad (2.18)$$

$$(|\delta Y(\omega, \vec{q})|^2) = \frac{1}{|Q_{\omega, \vec{q}}|^2} [\omega_q^2 (|\Phi_x(\omega, \vec{q})|^2) + (\zeta_1^2 + \omega^2) (|\Phi_y(\omega, \vec{q})|^2)]. \quad (2.19)$$

В полученные равенства входят не определённые нами до сих пор спектральные моменты для ланжевеновских источников  $\Phi_x$  и  $\Phi_y$ .

Перепишем введённые нами ранее выражения для спектральных плотностей ланжевеновских источников сред (1.2) - (2.23), учитывая, что насыщающие интенсивности для активной и пассивной среды имеют вид  $I_a = \beta_a n_0$ ,  $I_p = \beta_p n_0$ .

$$\langle \Phi_a^2 \rangle e^{-2i\varphi_0} = \langle \Phi_a^{*2} \rangle e^{2i\varphi_0} = -\frac{1}{2} \frac{A_a}{1 + I_a} \frac{I_a}{1 + I_a} \left(1 + \frac{s_a}{2}\right), \quad (2.20)$$

$$\langle |\Phi_a|^2 \rangle = \frac{A_a}{1 + I_a} - \frac{1}{2} \frac{A_a}{1 + I_a} \frac{I_a}{1 + I_a} \left(1 + \frac{s_a}{2}\right), \quad (2.21)$$

$$\langle \Phi_p^2 \rangle e^{-2i\varphi_0} = \langle \Phi_p^{*2} \rangle e^{2i\varphi_0} = \frac{1}{2} \frac{A_p}{1 + I_p} \frac{I_p}{1 + I_p} \left(1 - \frac{s_p}{2}\right), \quad (2.22)$$

$$\langle |\Phi_p|^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{A_p}{1 + I_p} \frac{I_p}{1 + I_p} \left(1 - \frac{s_p}{2}\right). \quad (2.23)$$

Теперь нетрудно показать используя равенства (2.6), (2.7), что спектральные плотности для новых ланжевеновских источников могут быть записаны следующим образом

$$(|\Phi_x(\omega, \vec{q})|^2) = \frac{1}{2} \left[ \frac{A_a}{1 + I_a} - D - \mathcal{E} \right], \quad (2.24)$$

$$(|\Phi_y(\omega, \vec{q})|^2) = \frac{1}{2} \frac{A_a}{1 + I_a}, \quad (2.25)$$



где

$$\mathcal{E} = \frac{A_a}{1 + I_a} \frac{I_a}{1 + I_a} \frac{s_a}{2} + \frac{A_p}{1 + I_p} \frac{I_p}{1 + I_p} \frac{s_p}{2} \quad (2.26)$$

связано со статистическими особенностями накачки активной и пассивной сред, а  $D$  определяется выражением (1.25).

### 2.3. Фотодетектирование солитона

Для того, чтобы проследить за квантово-статистическими свойствами поля лазерного солитона необходимо предложить измерительную процедуру, в результате которой эти свойства могут проявиться. Обычно для этого предлагают следить за полем, вышедшим из резонатора, в схеме балансного гомодинного детектирования. Оно удобно тем, что позволяет напрямую наблюдать за квадратурными компонентами лазерного поля.

Напомним, что гейзенберговой амплитудой  $\hat{a}(\vec{\rho}, t)$  мы описывали поле лазерного солитона внутри резонатора. При прохождении через выходное зеркало, однако, его квантово-статистические свойства могут существенно измениться. Поэтому нам необходимо установить связь между полями внутри и вне резонатора. Формально поле вышедшее из резонатора мы можем описать гейзенберговой амплитудой

$$\hat{a}_{out}(\vec{\rho}, t) = \sqrt{\kappa} \hat{a}(\vec{\rho}, t) - \hat{a}_{vac}(\vec{\rho}, t), \quad (2.27)$$

где  $\kappa$  определяет скорость ухода поля из резонатора. Возникновение слагаемого  $\hat{a}_{vac}(\vec{\rho}, t)$  может быть объяснено смешением внутрирезонаторного поля с вакуумом электромагнитного поля на выходном зеркале.

Обсудим подробно процедуру балансного гомодинного детектирования, схема которого представлена на рис. 2.1. Выходное поле  $\hat{a}_{out}(\vec{\rho}, t)$  смешивается на симметричной

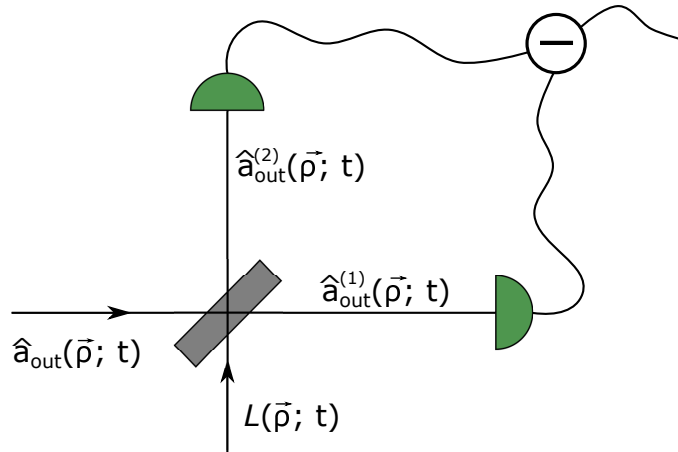


Рис. 2.1: Схема балансного гомодинного детектирования.

светоделительной пластине с гомодинным полем  $\hat{\mathcal{L}}(\vec{\rho}, t)$ . Пусть поле гомодина находится в когерентном состоянии. Этот факт позволяет заменить операторную амплитуду  $\hat{\mathcal{L}}(\vec{\rho}, t)$  на  $c$ -числовую  $\mathcal{L}(\vec{\rho}, t)$ . После прохождения пластины возникают два поля с амплитудами

$$\hat{a}_{out}^{(1)}(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{out}(\vec{\rho}, t) + \mathcal{L}(\vec{\rho}, t)), \quad \hat{a}_{out}^{(2)}(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{out}(\vec{\rho}, t) - \mathcal{L}(\vec{\rho}, t)), \quad (2.28)$$

которые детектируются каждое своим фотодетектором.

Мы предполагаем, что каждый фотон, попадающий на детектор, превращается в электрон в электрической цепи детектора. Тогда мы можем ввести в рассмотрение соответствующие операторы фототока в отсутствие потерь

$$\hat{i}_1(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{2} [\hat{a}_{out}^\dagger(\vec{\rho}, t) + \mathcal{L}^*(\vec{\rho}, t)] [\hat{a}_{out}(\vec{\rho}, t) + \mathcal{L}(\vec{\rho}, t)], \quad (2.29)$$

$$\hat{i}_2(\vec{\rho}, t) = \frac{1}{2} [\hat{a}_{out}^\dagger(\vec{\rho}, t) - \mathcal{L}^*(\vec{\rho}, t)] [\hat{a}_{out}(\vec{\rho}, t) - \mathcal{L}(\vec{\rho}, t)]. \quad (2.30)$$

Далее будем следить за разностным фототоком с детекторов

$$\hat{i}_-(\vec{\rho}, t) = \hat{i}_1(\vec{\rho}, t) - \hat{i}_2(\vec{\rho}, t) = \hat{a}_{out}(\vec{\rho}, t) \mathcal{L}^*(\vec{\rho}, t) + \hat{a}_{out}^\dagger(\vec{\rho}, t) \mathcal{L}(\vec{\rho}, t). \quad (2.31)$$

Как было сказано выше, в схеме гомодинного детектирования удобно вести наблюдение за квадратурными компонентами лазерного поля, которые вводятся как реальная и мнимая части амплитуды исследуемого поля  $\hat{a}_{out}(\vec{\rho}, t) e^{-i\varphi_0} = \hat{x}_{out}(\vec{\rho}, t) + i\hat{y}_{out}(\vec{\rho}, t)$ . Проследим сначала за  $x_{out}$ -квadrатурой. Для этого необходимо, чтобы амплитуда поля локального осциллятора была бы вещественной  $\mathcal{L}^*(\vec{\rho}, t) = \mathcal{L}(\vec{\rho}, t)$ . Тогда

$$\hat{i}_-(\vec{\rho}, t) = 2\mathcal{L}(\vec{\rho}, t) \hat{x}_{out}(\vec{\rho}, t). \quad (2.32)$$

Наблюдение  $y_{out}$ -квadrатуры возможно в случае чисто мнимого локального осциллятора  $\mathcal{L}(\vec{\rho}, t) = -\mathcal{L}^*(\vec{\rho}, t)$

$$\hat{i}_-(\vec{\rho}, t) = 2\mathcal{L}(\vec{\rho}, t) \hat{y}_{out}(\vec{\rho}, t). \quad (2.33)$$

Определим оператор флуктуаций разностного фототока

$$\delta\hat{i}_-(\vec{\rho}, t) = \hat{i}_-(\vec{\rho}, t) - \langle \hat{i}_-(\vec{\rho}, t) \rangle. \quad (2.34)$$

Парный коррелятор флуктуаций разностного фототока для  $x_{out}$ -квadrатуры, учитывая (2.32), (2.34) и  $\delta\hat{a}_{out}(\vec{\rho}, t) = \hat{a}_{out}(\vec{\rho}, t) - \langle \hat{a}_{out}(\vec{\rho}, t) \rangle$  будет выражен следующим равенством

$$\langle \delta\hat{i}_-(\vec{\rho}, t) \delta\hat{i}_-(\vec{\rho}', t') \rangle = 4\mathcal{L}(\vec{\rho}, t) \mathcal{L}(\vec{\rho}', t') \langle \delta\hat{x}_{out}(\vec{\rho}, t) \delta\hat{x}_{out}(\vec{\rho}', t') \rangle. \quad (2.35)$$

Перепишем его через нормально упорядоченное среднее операторов

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{i}_-(\vec{\rho}, t) \delta \hat{i}_-(\vec{\rho}', t') \rangle = & \mathcal{L}(\vec{\rho}, t) \mathcal{L}(\vec{\rho}', t') \left[ \delta(t-t') \delta^2(\vec{\rho} - \vec{\rho}') + \right. \\ & \left. + 4 \langle : \delta \hat{x}_{out}(\vec{\rho}, t) \delta \hat{x}_{out}(\vec{\rho}', t') : \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Сделаем обратный переход от флуктуаций квадратурных компонент поля вне резонатора  $\delta \hat{x}_{out}(\vec{\rho}, t), \delta \hat{y}_{out}(\vec{\rho}, t)$  к квадратурным компонентам поля внутри резонатора  $\delta \hat{X}(\vec{\rho}, t), \delta \hat{Y}(\vec{\rho}, t)$ , воспользовавшись равенствами (2.27) и  $\delta \hat{A}(\vec{\rho}, t) e^{-i\varphi_0} = (\hat{a}(\vec{\rho}, t) - \langle \hat{a}(\vec{\rho}, t) \rangle) e^{-i\varphi_0} = \delta \hat{X}(\vec{\rho}, t) + i \delta \hat{Y}(\vec{\rho}, t)$ .

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{i}_-(\vec{\rho}, t) \delta \hat{i}_-(\vec{\rho}', t') \rangle = & \mathcal{L}(\vec{\rho}, t) \mathcal{L}(\vec{\rho}', t') \left[ \delta(t-t') \delta^2(\vec{\rho} - \vec{\rho}') + \right. \\ & \left. + 4\kappa \langle : \delta \hat{X}(\vec{\rho}, t) \delta \hat{X}(\vec{\rho}', t') : \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Так как под знаком усреднения в правой части равенства стоят нормально упорядоченные операторы, то мы можем перейти от операторного представления к с-числовому

$$\begin{aligned} \langle \delta i_-(\vec{\rho}, t) \delta i_-(\vec{\rho}', t') \rangle = & \mathcal{L}(\vec{\rho}, t) \mathcal{L}(\vec{\rho}', t') \left[ \delta(t-t') \delta^2(\vec{\rho} - \vec{\rho}') + \right. \\ & \left. + 4\kappa \langle \delta X(\vec{\rho}, t) \delta X(\vec{\rho}', t') \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

## 2.4. Спектр флуктуаций фототока

Чтобы получить спектр флуктуаций разностного фототока, необходимо определить вид поля локального осциллятора. Напомним, что мы рассматриваем случай стационарной генерации, когда число фотонов в лазерном солитоне условно можно считать постоянным. Тогда поле гомодина можно выбрать таким образом, чтобы число фотонов  $n_g$ , проходящих через поперечное сечение луча в каждый момент времени было постоянным. Для этого необходимо, чтобы амплитуда поля не зависела ни от времени, ни от пространственных координат, или, аналогично, в спектральном представлении, выполнялось равенство:

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \omega) = \sqrt{n_g}. \quad (2.39)$$

Тогда в спектральном представлении корреляционная функция разностного фототока (2.38) может быть записана в виде

$$\langle \delta i_-(\vec{q}, \omega) \delta i_-(\vec{q}', \omega') \rangle = n_g \left[ \delta(q+q') \delta(\omega+\omega') + 4\kappa \langle \delta X(\vec{q}, \omega) \delta X(\vec{q}', \omega') \rangle \right]. \quad (2.40)$$

Используя равенства (2.16) и (2.18), а также выражения для спектральных плотностей ланжевенских источников (2.24), (2.25), получим для спектра флуктуаций фо-

ТОТОКА

$$\langle |\delta i_-(\vec{q}, \omega)|^2 \rangle = n_g \left[ 1 + \frac{4\kappa}{2|Q_{\omega, \vec{q}}|^2} \left[ \omega_q^2 \frac{A_a}{1+I_a} + (\zeta_2^2 + \omega^2) \left( \frac{A_a}{1+I_a} - D - \mathcal{E} \right) \right] \right]. \quad (2.41)$$

напомним, что здесь  $\omega_q = cq^2/(2k_0)$ ,  $Q_{\omega, \vec{q}} = (\zeta_1 - i\omega)(\zeta_2 - i\omega) + \omega_q^2$ ,  $\zeta_1 = D + \frac{1}{2}\kappa\mu$  и  $\zeta_2 = \frac{1}{2}\kappa\mu$ .

$$D = \frac{A_a}{1+I_a} \frac{I_a}{1+I_a} - \frac{A_p}{1+I_p} \frac{I_p}{1+I_p},$$

$$\mathcal{E} = \frac{A_a}{1+I_a} \frac{I_a}{1+I_a} \frac{s_a}{2} + \frac{A_p}{1+I_p} \frac{I_p}{1+I_p} \frac{s_p}{2}.$$

В режиме стационарной генерации необходимо, чтобы выполнялось условие (1.22). Тогда нетрудно увидеть, что в случае большой насыщающей интенсивности для пассивной среды  $\frac{A_a}{1+I_a} \xrightarrow{I_p \rightarrow \infty} \kappa$  при любых значениях  $I_a$ . В таком случае выражение для спектра флуктуаций перепишется в виде

$$\frac{\langle |\delta i_-(\vec{q}, \omega)|^2 \rangle}{n_g} = 1 + \frac{4\kappa}{2|Q_{\omega, \vec{q}}|^2} \left[ \omega_q^2 \kappa + (\zeta_2^2 + \omega^2) \left( \kappa - \kappa \frac{I_a}{1+I_a} - \frac{A_p}{1+I_p} \frac{I_p}{1+I_p} - \kappa \frac{I_a}{1+I_a} \frac{s_a}{2} + \frac{A_p}{1+I_p} \frac{I_p}{1+I_p} \frac{s_p}{2} \right) \right], \quad I_p \rightarrow \infty. \quad (2.42)$$

Устойчивые структуры светового поля в схеме лазера с насыщающимся поглощением будут формироваться в случае, когда выполнено соотношение  $I_a \ll I_p$ .

Рассмотрим случай, когда пространственная частота  $\omega_q = 0$ ,  $I_a \gg 1$ , а накачка обоих сред регулярна  $s_a = s_p = 1$ . Нетрудно заметить, что тогда во временном спектре фототока на нулевой частоте мы будем наблюдать подавление дробового шума до нуля. Эта ситуация продемонстрирована на рис. 2.1(а). Значение спектра флуктуаций разностного фототока в этой точке легко может быть получено аналитически. При достаточно больших значениях  $I_p$  (в пределе  $I_p \rightarrow \infty$ ) для остальных параметров системы получим:  $D \rightarrow \kappa \frac{I_a}{1+I_a}$ ;  $\mathcal{E} \rightarrow \kappa \frac{s_a}{2} \frac{I_a}{1+I_a}$ ; а  $|Q_{\omega, \vec{q}}|^2 \rightarrow \kappa^2 \zeta_2^2$ . Откуда следует, что

$$\frac{\langle |\delta i_-(0, 0)|^2 \rangle}{n_g} = 1 + \frac{4\kappa}{2\kappa^2} \left( \kappa - \kappa \frac{I_a}{1+I_a} - \frac{\kappa}{2} \frac{I_a}{1+I_a} \right) \xrightarrow{I_a \gg 1} 1 + \frac{2}{\kappa} \left( -\frac{\kappa}{2} \right) = 0. \quad (2.43)$$

Если накачка активной среды будет случайной ( $s_a = 0$ ), то уровень дробового шума будет постоянным на всех частотах. В самом деле,

$$\frac{\langle |\delta i_-(0, \omega)|^2 \rangle}{n_g} = 1 + \frac{4\kappa}{2|Q_{\omega, \vec{q}}|^2} \left[ (\zeta_2^2 + \omega^2) \left( \kappa - \kappa \frac{I_a}{1+I_a} \right) \right] \xrightarrow{I_a \gg 1} 1. \quad (2.44)$$

Заметим также, что статистика накачки пассивной среды в случае, когда  $I_a \ll I_p$  не влияет на дробовый шум.

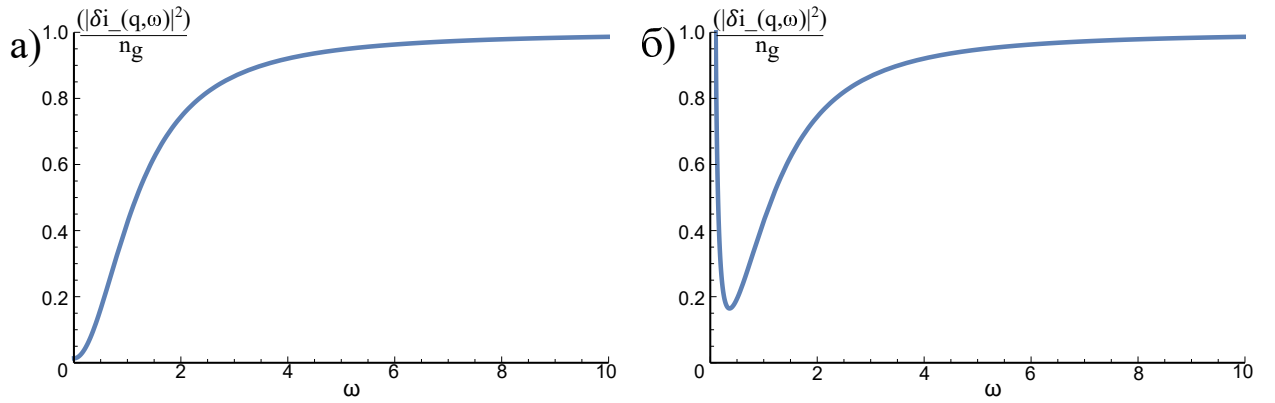


Рис. 2.2: Временной спектр флуктуаций измеренного фототока при  $I_p = 10I_a$ ;  $s_a = s_p = 1$  в случае а)  $|q| = 0$ , б)  $|q| = 0.02$ .

Отметим, что вид спектра флуктуаций разностного фототока на рис. 2.1(а) полностью совпадает с аналогичной картиной для субпуассоновского лазера, то есть пространственная специфика поля в этом пределе не проявляется.

На рис. 2.1(б) отражена ситуация, когда мы рассматриваем ненулевые пространственные частоты ( $|q| \neq 0$ ). Во временном спектре за которым мы следим на нулевой частоте возникает особенность, появляется избыточный шум. Возникновение этого шума вероятно связано с тем, что теперь мы рассматриваем поле солитона только в некоторой ограниченной области, не учитывая хвосты распределения. Такое поведение требует дополнительного детального исследования и показывает область потенциального интереса для изучения квантовых свойств лазерных солитонов.

# Заключение

Данная выпускная квалификационная работа, посвящённая построению квантовой теории пространственных диссипативных солитонов, является продолжением исследований [19–21]. Перед нами стояла задача получить аналитическое решение нелинейного уравнения (1.1), описывающего формирование пространственного солитона в кольцевом оптическом резонаторе, заполненном двумя атомными средами. Также необходимо было предложить измерительную процедуру, которая позволила бы проследить за квантово-статистическими особенностями поля солитона.

Получить аналитическое решение основного уравнения оказалось затруднительно из-за его существенной нелинейности. Обычно в таких случаях предлагают линеаризовать систему. В данной работе мы представили два подхода к линеаризации уравнения для амплитуды поля лазерного солитона. Первый, типичный для солитонных задач подход описания флуктуаций на фоне классического солитонного решения, оказался неприменим из-за характера нелинейности задачи. Мы не смогли получить аналитическое решение уравнения в виде разложения по собственным функциям однородного уравнения. Однако возможно численное решение задачи, что представлено в нашей работе [23].

Применение второго подхода позволило нам обойти возникшие неприятности. Мы предложили описывать поле таким образом, чтобы можно было как в лазерных задачах говорить о малых флуктуациях числа фотонов в поле солитона на фоне постоянного большого числа фотонов в классическом солитоне. Тогда мы получили аналитическое решение задачи для амплитуды флуктуаций поля солитона.

Для описания квантово-статистических свойств света в квантовой оптике необходимо произвести измерительную процедуру. Мы описали процесс гомодинного детектирования поля лазерного солитона, вышедшего из резонатора, а также получили и проанализировали спектр флуктуаций фототока квадратурных компонент. Оказалось, что в случае, когда пространственная частота равна нулю, во временном спектре измеренного фототока на нулевой частоте будет наблюдаться подавление дробового шума. В тех случаях, когда значение пространственной частоты не равно нулю, во временном спектре наблюдаются избыточные шумы. Такие случаи требуют дополнительного детального рассмотрения.

# Литература

- [1] Hasegawa A. Soliton-based optical communications: An overview //IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. – 2000. – Т. 6. – №. 6. – С. 1161-1172.
- [2] Doran N. J., Wood D. Soliton processing element for all-optical switching and logic //JOSA B. – 1987. – Т. 4. – №. 11. – С. 1843-1846.
- [3] Cancellieri G. et al. Coupled-soliton photonic logic gates: practical design procedures //JOSA B. – 1995. – Т. 12. – №. 7. – С. 1300-1306.
- [4] Ghadi A. Phase sensitive, all-optical and self-integrated multi-logic AND, OR, XOR, and NOT gates //Physics Letters A. – 2020. – Т. 384. – №. 22. – С. 126432.
- [5] Islam M. N., Soccolich C. E. Billiard-ball soliton interaction gates //Optics letters. – 1991. – Т. 16. – №. 19. – С. 1490-1492.
- [6] Peccianti M. et al. All-optical switching and logic gating with spatial solitons in liquid crystals //Applied Physics Letters. – 2002. – Т. 81. – №. 18. – С. 3335-3337.
- [7] Serak S. V. et al. Spatial soliton all-optical logic gates //IEEE photonics technology letters. – 2006. – Т. 18. – №. 12. – С. 1287-1289.
- [8] Shi T. T., Chi S. Nonlinear photonic switching by using the spatial soliton collision //Optics letters. – 1990. – Т. 15. – №. 20. – С. 1123-1125.
- [9] Розанов Н. Н. Диссипативные оптические солитоны. От микро-к нано-и атто. – 2011.
- [10] Carter S. J. et al. Squeezing of quantum solitons //Physical review letters. – 1987. – Т. 58. – №. 18. – С. 1841.
- [11] Lai Y. Quantum theory of soliton propagation: a unified approach based on the linearization approximation //JOSA B. – 1993. – Т. 10. – №. 3. – С. 475-484.
- [12] Drummond P. D., Carter S. J. Quantum-field theory of squeezing in solitons //JOSA B. – 1987. – Т. 4. – №. 10. – С. 1565-1573.
- [13] Drummond P. D. et al. Quantum solitons in optical fibres //Nature. – 1993. – Т. 365. – №. 6444. – С. 307-313.

- [14] Kolobov M. I. (ed.). Quantum imaging. – Springer Science & Business Media, 2007.
- [15] Oppo G. L., Jeffers J. Quantum fluctuations in cavity solitons //Quantum Imaging. – Springer, New York, NY, 2007. – С. 221-237.
- [16] Friberg S. R. et al. Observation of optical soliton photon-number squeezing //Physical review letters. – 1996. – Т. 77. – №. 18. – С. 3775.
- [17] Rosenbluh M., Shelby R. M. Squeezed optical solitons //Physical review letters. – 1991. – Т. 66. – №. 2. – С. 153.
- [18] Spaelter S. et al. Propagation of quantum properties of sub-picosecond solitons in a fiber //Optics Express. – 1998. – Т. 2. – №. 3. – С. 77-83.
- [19] Golubev Y. M. et al. Effect of saturated absorption on sub-Poissonian lasing //Laser Physics Letters. – 2018. – Т. 16. – №. 2. – С. 025201.
- [20] Golubeva T. Y. et al. Quantum theory of laser soliton //Laser Physics Letters. – 2019. – Т. 16. – №. 12. – С. 125201.
- [21] Голубева Т. Ю. и др. Квантовые флуктуации в лазерном солитоне //Оптика и спектроскопия. – 2020. – Т. 128. – №. 4. – С. 517-534.
- [22] Нестеров Л. А., Веретенков Н. А., Розанов Н. Н. Квантовые флуктуации одномерных и двумерных пространственных диссипативных солитонов в нелинейном интерферометре. I. Одномерные темные солитоны //Оптика и спектроскопия. – 2015. – Т. 118. – №. 5. – С. 815-827.
- [23] Fedorov S. V., Rosanov N. N., Aleksandrov I. A., Popov R. V., Tumakov D. A., Dadeko A. V., Vashukevich E. A., Baeva A. V. Quantum field fluctuations in the vicinity of a classical laser soliton //Laser Physics Letters. – 2020. – Т. 18. – №. 1. – С. 015204.



# Приложение А

## Уравнения Гейзенберга-Ланжевена для атомных сред и поля солитона

Получение замкнутого квантового уравнения для амплитуды поля лазерного солитона (1.1) подробно обсуждалось в работах [19, 20]. Здесь мы обсудим лишь основные моменты.

Пространственный лазерный солитон может быть образован в высокочастотном оптическом резонаторе бегущей волны, равномерно заполненном двумя различными средами, состоящими из двухуровневых атомов. Первая среда обеспечивает лазерную генерацию, а вторая – насыщенное поглощение поля. Для упрощения задачи будем считать, что частоты переходов для активной и пассивной сред равны. Предполагается, что атомы неподвижны и не взаимодействуют друг с другом. Это позволяет обсуждать уравнения для среды в терминах коллективных переменных, которые определяются как линейные суперпозиции индивидуальных атомных переменных

$$\hat{\pi}(\vec{\rho}, t) = -i \sum_j \hat{\pi}^j(\vec{\rho}, t) \theta(t - t_j) \delta^2(\rho - \rho_j) e^{ikz_j}, \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{\pi}_1(\vec{\rho}, t) = \sum_j \hat{\pi}_1^j(\vec{\rho}, t) \theta(t - t_j) \delta^2(\rho - \rho_j), \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{\pi}_2(\vec{\rho}, t) = \sum_j \hat{\pi}_2^j(\vec{\rho}, t) \theta(t - t_j) \delta^2(\rho - \rho_j), \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{\sigma}(\vec{\rho}, t) = -i \sum_j \hat{\sigma}^j(\vec{\rho}, t) \theta(t - t_j) \delta^2(\rho - \rho_j) e^{ikz_j}, \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{\sigma}_1(\vec{\rho}, t) = \sum_j \hat{\sigma}_1^j(\vec{\rho}, t) \theta(t - t_j) \delta^2(\rho - \rho_j), \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{\sigma}_2(\vec{\rho}, t) = \sum_j \hat{\sigma}_2^j(\vec{\rho}, t) \theta(t - t_j) \delta^2(\rho - \rho_j), \quad (\text{A.6})$$

здесь  $\hat{\pi}(\vec{\rho}, t)$ ,  $\hat{\sigma}(\vec{\rho}, t)$  – когерентности пассивной и активной сред соответственно.  $\hat{\pi}_1(\vec{\rho}, t)$ ,  $\hat{\sigma}_1(\vec{\rho}, t)$  – заселённости нижних уровней атомных сред, а  $\hat{\pi}_2(\vec{\rho}, t)$ ,  $\hat{\sigma}_2(\vec{\rho}, t)$  – заселённости верхних уровней.

Уравнения Гейзенберга-Ланжевена для введённых нами заселённостей и когерентностей атомных сред выглядят следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi = -\gamma\pi + g(\pi_2 - \pi_1)a + G, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi_1 = R_p - \gamma_1\pi_1 + g(\pi^*a + a^*\pi) + G_1, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi_2 = -\gamma_2\pi_2 - g(\pi^*a + a^*\pi) + G_2, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma = -\Gamma\sigma + g(\sigma_2 - \sigma_1)a + F, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_1 = -\Gamma_1\sigma_1 + g(\sigma^*a + a^*\sigma) + F_1, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_2 = R_a - \Gamma_2\sigma_2 - g(\sigma^*a + a^*\sigma) + F_2. \quad (\text{A.12})$$

Также мы можем записать уравнение для поля лазерного солитона

$$\frac{\partial}{\partial t}a - \frac{ic}{2k_0}\Delta_{\perp}a = -\frac{\kappa}{2}a + g\sigma + g_p\pi. \quad (\text{A.13})$$

Уравнения записаны здесь в  $s$ -числовом, а не операторном представлении, что значительно упрощает дальнейшую математическую обработку. В уравнениях (A.7 – A.13)  $g, g_p$  – константы взаимодействия,  $R_a, R_p$  – скорости накачки активной и пассивной сред соответственно,  $G, G_1, G_2, F, F_1, F_2$  – ланжевенские шумовые источники, появление которых обусловлено наличием потерь в системе.

Свойства шумовых ланжевенских источников будут определяться их нулевыми средними и ненулевыми корреляционными функциями

$$\langle F_i^*(\vec{\rho}, t)F_j(\vec{\rho}', t') \rangle = \langle F_i^*F_j \rangle \delta(t - t')\delta^2(\rho - \rho'), \quad (\text{A.14})$$

$$\langle G_i^*(\vec{\rho}, t)G_j(\vec{\rho}', t') \rangle = \langle G_i^*G_j \rangle \delta(t - t')\delta^2(\rho - \rho'). \quad (\text{A.15})$$

Выпишем здесь ненулевые корреляционные функции шумовых источников для активной

$$\langle F^*F \rangle = \Gamma_1\bar{\sigma}_2 + R_a, \quad (\text{A.16})$$

$$\langle FF \rangle = 2g\bar{\sigma}a, \quad (\text{A.17})$$

$$\langle F_1F \rangle = \Gamma_1\bar{\sigma}, \quad (\text{A.18})$$

$$\langle F_2F_2 \rangle = \Gamma_2\bar{\sigma}_2 + R_a(1 - s_a) - g(\bar{a}^*\bar{\sigma} + \bar{a}\bar{\sigma}^*), \quad (\text{A.19})$$

$$\langle F_1F_1 \rangle = \Gamma_1\bar{\sigma}_1 - g(\bar{a}^*\bar{\sigma} + \bar{a}\bar{\sigma}^*), \quad (\text{A.20})$$

$$\langle F_2F_1 \rangle = g(\bar{a}^*\bar{\sigma} + \bar{a}\bar{\sigma}^*), \quad (\text{A.21})$$

и пассивной атомных сред

$$\langle G^*G \rangle = R_p + \gamma_1 \bar{\pi}_2 - \gamma_1 \bar{\pi}_1 + \gamma_2 \bar{\pi}_2 + 2g_p(\bar{a}^* \bar{\pi} + \bar{a} \bar{\pi}^*), \quad (\text{A.22})$$

$$\langle GG \rangle = 2g_p \bar{\pi} \bar{a}, \quad (\text{A.23})$$

$$\langle G_2G \rangle = \gamma_2 \bar{\pi}, \quad (\text{A.24})$$

$$\langle G_1G_1 \rangle = \gamma_1 \bar{\pi}_1 + R_p(1 - s_p) - g_p(\bar{a}^* \bar{\pi} + \bar{a} \bar{\pi}^*), \quad (\text{A.25})$$

$$\langle G_2G_2 \rangle = \gamma_2 \bar{\pi}_2 - g_p(\bar{a}^* \bar{\pi} + \bar{a} \bar{\pi}^*), \quad (\text{A.26})$$

$$\langle G_1G_2 \rangle = g_p(\bar{a}^* \bar{\pi} + \bar{a} \bar{\pi}^*), \quad (\text{A.27})$$

Параметры  $s_a, s_p$  могут принимать значения от 0 до 1. Они описывают характер накачки. Случай, когда параметр принимает значение 1, соответствует регулярной накачке без шумов. Когда параметр равен 0, ситуация обратная, атомы возбуждаются случайно во времени и независимо друг от друга.

Из системы уравнений (A.7 – A.13) в принципе уже можно получить необходимую информацию о поле лазерного солитона  $a(\vec{\rho}, t)$ , однако мы хотим построить замкнутое уравнение. Добиться этого возможно при адиабатическом исключении атомных переменных из рассмотрения. При условии, что полевая переменная развивается медленнее атомных, должны выполняться следующие неравенства для констант затухания поля и атомных переменных:  $\kappa \ll \Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \kappa \ll \gamma, \gamma_1, \gamma_2$ . Тогда мы получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\gamma \pi = g(\pi_2 - \pi_1)a + G, \quad (\text{A.28})$$

$$\gamma_1 \pi_1 = R_p + g(\pi^* a + a^* \pi) + G_1, \quad (\text{A.29})$$

$$\gamma_2 \pi_2 = -g(\pi^* a + a^* \pi) + G_2, \quad (\text{A.30})$$

$$\Gamma \sigma = g(\sigma_2 - \sigma_1)a + F, \quad (\text{A.31})$$

$$\Gamma_1 \sigma_1 = g(\sigma^* a + a^* \sigma) + F_1, \quad (\text{A.32})$$

$$\Gamma_2 \sigma_2 = R_a - g(\sigma^* a + a^* \sigma) + F_2, \quad (\text{A.33})$$

Решая данную систему уравнений относительно переменных  $\sigma$  и  $\pi$  и подставляя полученные решения в уравнение (A.13) мы получим искомое замкнутое уравнение для амплитуды поля лазерного солитона (1.1).

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{ic}{2k_0} \Delta_{\perp} \right] a(\vec{\rho}, t) = -\frac{\kappa}{2} [a(\vec{\rho}, t) - a_{in}(\vec{\rho}, t)e^{-i\nu_{in}t}] + \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{A_a}{1 + \beta_a |a(\vec{\rho}, t)|^2} - \frac{A_p}{1 + \beta_p |a(\vec{\rho}, t)|^2} \right] a(\vec{\rho}, t) + e^{-i\nu_{in}t} \Phi(\vec{\rho}, t), \end{aligned}$$

здесь  $\Phi(\vec{\rho}, t) = \Phi_a(\vec{\rho}, t) + \Phi_p(\vec{\rho}, t)$  – сумма ланжевенских шумовых источников активной и пассивной атомных сред, которые в свою очередь являются линейной комбинацией шумовых источников  $G, G_1, G_2$  для пассивной и  $F, F_1, F_2$  для активной среды.