1 Введение

Согласно классической теории, описание эволюции физических систем производится с помощью определенного числа величин, так называемых динамических переменных; все эти переменные в каждый момент имеют определенные значения, так что задание всей совокупности этих значений определяет динамическое состояние системы в данный момент времени; принимается так же , что эволюция физической системы во времени полностью задана, если известно ее состояние в некоторый начальный момент. Со временем классическая теория столкнулась с некоторыми трудностями и противоречиями при описании явлении на микроскопическом уровне. Стало очевидно, что физические явления на микроскопических уровнях вообще не могут быть описаны на основе классической теории и для их объяснения нужны совершенно новые принципы.
В частности в опыте по дифракции света выяснилась двойственность природы света. (Опыт Юнга). Выяснилось, что и вещество обладает аналогичными свойствами корпускулярно-волнового дуализма,подобно тому, как электромагнитные волны ассоциируются с фотоном, допустим, что каждой материальной частице сопоставлена волна круговая частота которой равна ω связанная с энергией E соотношением Эйнштейна $E = \hbar\omega$. Основные свойства волн вещества получаются по аналогии с оптикой. Как и в случае фотонов, мы допускаем, что значение интенсивности ассоциированной волны в каждой точке пропорционально вероятности обнаружить частицу в этой точке.
В качестве волны ассоциируемой с частицей мы будем рассматривать волновой пакет состоящий из монохроматических волн $\exp^{i(kr-\omega t)}$ вида:

$$\psi(r,t) = \int f(k') \exp^{i(k'r-\omega' t)} \, dk'$$

Скорость движения волнового пакета называется групповой скоростью волны и она отождествляется со скоростью частицы в классическом приближении. учитывая, что $\frac{d\omega}{dk} = v = \frac{dE}{dp} = \frac{d\frac{p^2}{2m}+U(r)}{p}$ находим соотношение де Бройля

$$p = \hbar k$$

Мы видим, что интенсивность ассоциированной волны в данной точке в данный момент времени дает вероятность найти частицу в этой точке в этот момент времени. В квантовой механике мы постулируем, что волновая функция Ψ квантовой системы полностью определяет динамическое состояние системы, т.е. что все предсказания, которые могут быть сделаны относительно различных динамических свойств системы в данный момент времени t, следуют из значения Ψ в этот момент времени t.

Основная задача теории состоит в том, чтобы зная волновую функцию в начальный момент времени t_0 определить ее значения в последующие моменты времени. Для этого в квантовой механике вводится уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

Пусть $\Psi(\mathbf{r}, t)$ есть волновая функция. Она удовлетворяет уравнению Шредингера и полностью определяется в любой момент времени, если известна $\Psi(\mathbf{r}, t_0)$. В дальнейшем мы будет анализировать волновую функцию в данный момент времени t и будем обозначать ее $\Psi(\mathbf{r})$.
Динамическое состояние классической частицы определяется в каждый момент заданием ее положения $\mathbf{r}(x, y, z)$ и импульса $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$. Но поскольку волновая функция имеет некую протяженность в пространстве, мы не можем приписывать квантовой частице точное положение в пространстве. Можем говорить лишь о вероятности найти частицу в некоторой области пространства, когда производится измерение ее положения. Обозначим символом $P(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ вероятность найти частицу в элементе объема$(\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$. Подобно этому мы, вообще говоря не можем приписать квантовой частице точно заданный импульс. Обозначим символом $\Pi\left(\mathbf{p}\right)$ вероятность найти импульс частицы в интервала $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p})$. Распределение вероятности должны быть полностью заданы, если известна волновая функция $\Psi(r)$. Определим $P(r)$ равенством

$$P(r) = \Psi^*(r)\Psi(r) = |\Psi(r)|^2$$

Чтобы определить $\Pi(p)$ введем преобразования Фурье волновой функции согласно соотношениям

$$\Phi(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int \Psi(r)\text{exp}^{-i\frac{pr}{\hbar}}dr$$

$$\Psi(r) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int \Phi(p)\text{exp}^{i\frac{pr}{\hbar}}dp$$

Таким образом, по аналогии с пространственной вероятностью, определим вероятность найти частицу с импульсом р равенством

$$\Pi(p) = \Phi^*(p)\Phi(p) = |\Phi(p)|^2$$

Таким образом распределения $P(r)$ и $\Pi(p)$, будучи определены на основе одной и той же волновой функции $\Psi(r)$, не являются независимыми друг от друга. Тот факт, что всегда существует некая зависимость между распределениями $P(r)$ и $\Pi(p)$ является характерным для квантовой теории.

Эта корреляция количественно выражается *соотношением неопределенности Гейзенберга.*
Рассмотрим некоторые примеры
1. Дельта функция:
Пусть $\psi(x) = \delta(x)$, тогда взяв преобразование Фурье мы получим

$$\phi(p) = Const$$

т.е. зная точно координату частицы мы не можем определить импульс этой частицы.

2. Прямоугольный сигнал:
В качестве другого примера рассмотрим "прямоугольный сигнал"

$$\psi(x) = \exp^{ip_0x/\hbar}\, npu|x| < a$$

$$\psi(x) = 0npu|x| > 0$$

который отличен от нудя в области ширины 2a, окружающей точку $x = 0$. В этом случае имеем

$$\phi(p) = \frac{\sqrt{2\hbar/\pi}}{p-p_0}\sin\frac{(p-p_0)a}{\hbar}$$

тогда $\Delta p \approx 2\pi\hbar/a$ и $\Delta x \approx 2a$ т.е.

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx 4\pi\hbar$$

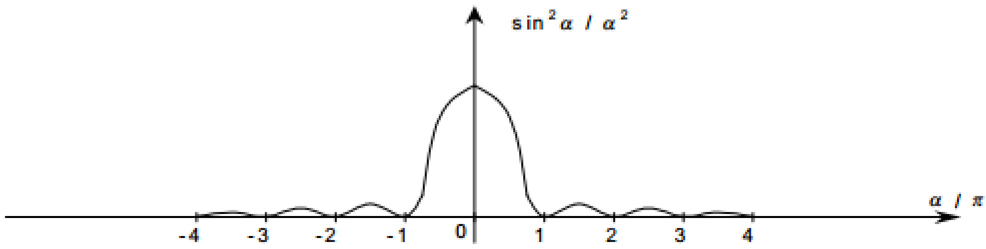
2 Принцип неопределенности Гейзенберга

2.1 Полуколичественные рассуждения

Результат Гейзенберга опирался на тот математический факт, что протяженность волны $\psi(x)$ и ее образ Фурье $\phi(p)$ в соответствующих пространствах не могут одновременно быть сделаны произвольно малыми. Если волна ψ занимает область порядка Δx в пространстве x, а волна ϕ-область порядка Δp в пространстве p, то произведение $\Delta x\Delta p$ остается все время больше некоторой величины порядка $\hbar$

$$\Delta x\Delta p \gtrsim \hbar$$

В справедливости этого соотношения можно убедиться путем следующих полуколичественных рассуждений. Рассмотрим частицу локализованную в некоторой области пространства Δx она описывается волновым



пакетом вида

$$\Psi(x,t) = \int_{p_0-\Delta p}^{p_0+\Delta p} A(p)\exp^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}\,dp$$

Вычислим приближенно интеграл используя следующие приближения

$$A(p) \approx A(p_0) = A_0$$

$$E(p) \approx E(p_0) + \left(\frac{dE}{dp}\right)_0 (p-p_0) = E_0 + V_0(p-p_0)$$

Интегрирую получим:

$$\Psi(x,t) \approx 2A_0\Delta p \frac{\sin\frac{\Delta p}{\hbar}(V_0 t - x)}{\frac{\Delta p}{\hbar}(V_0 t - x)}\exp^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 t - p_0 x)}$$

Квадрат модуля этой волны, представляется формулой:

$$|\Psi(x,t)|^2 = 4A_0^2(\Delta p)^2\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$$

где $\alpha = \frac{\Delta p}{\hbar}(V_0 t - x)$

Полученная функция быстро убывает и вне интервале от $-\pi$ до π функция мала по сравнению со значением в нуле. Частица с подавляющей вероятностью находится на участке оси Ox между точками x_1 $\left(\alpha_1 = \frac{\pi}{\alpha}\right)$ и x_2 $\left(\alpha_2 = -\frac{\pi}{\alpha}\right)$. Длина участка $\Delta x \approx x_2 - x_1 \gtrsim \frac{2\pi\hbar}{\Delta p}$. Отсюда следует одно из соотношений неопределенности:

$$\Delta x \Delta p \gtrsim 2\pi\hbar$$

2.2 Точное выражение соотношений неопределенности

В квантовой механике по аналогии с функциями классической механике вводятся операторы. Для точного вывода соотношения неопределенности нам понадобятся еще некоторые определение

1.Коммутатором двух операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ называется следующий оператор:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

2. ΔA и ΔB являются средними квадратичными отклонениями операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$.
$\Delta A \equiv \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$ $\Delta B \equiv \sqrt{\langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2}$
Рассмотрим вспомогательный оператор

$$L(\hat{\beta}) = \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle\right) + i\beta \left(\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle\right)$$

где $\hat{A}$ и $\hat{B}$-эрмитовы операторы.
С одной стороны

$$\langle \hat{L}\psi | \hat{L}\psi \rangle \geqslant 0$$

С другой стороны

$$\langle \hat{L}\psi | \hat{L}\psi \rangle = \langle \psi | \hat{L}^+ \hat{L} | \psi \rangle = \langle \psi | \left(\hat{A} - A\right)^2 | \psi \rangle + \beta^2 \langle \psi | \left(\hat{B} - B\right)^2 | \psi \rangle + i\beta \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle \geqslant 0$$

Получим квадратный полином относительно β является положительно определенным, его дискриминант отрицательный или равен нулю, следовательно

$$\Delta A \Delta B \geqslant \frac{|\overline{[\hat{A}, \hat{B}]}|}{2}$$

Таким образом, если коммутатор $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, тогда A и B могут быть измерены точно.

3 Неконтролируемое возмущение в процессе измерения

Рассмотрим тщательней, что представляет собой сама операция измерения. Пусть мы имеем дело с измерением координат, определяющих положение частицы квантовой системы, динамическое состояние которой представляется волновой функцией Ψ. Допустим, что мы обладаем идеально точным прибором. Невозможность точно предсказать показание этого прибора не связано с его несовершенством. Дело в том, что состояние Ψ в общем случае не соответствует какому-либо точному значению .

Это суперпозиция динамических состояний, каждое из которых соответствует своему значению . Непосредственно после того как измерение выполнено, мы можем утверждать, что система находится в динамическом состоянии, в котором координата , имеет точное значение x', указанного прибором. Но такое состояние, очевидно, уже не может быть представлено волновой функцией Ψ, следовательно, вмешательство измерительного прибора изменило динамическое состояние измеряемой системы. Т.е. мы не можем точно предсказать, каким же будет состояние системы после измерения мы знаем только вероятность того, что система находится в некотором динамических состояниях, соответствующих тем или иным значениям x' координаты x.

В том, что измеряемая система в процессе измерений претерпевает изменения, нет ничего удивительного. Ведь сам процесс измерения предполагает взаимодействие системы с измерительным прибором, при котором последний претерпевает изменение своего состояния. Естественно, что и измеряемая система в процессе измерения изменит свое состояние. В случае макроскопических явлений всегда можно добиться, чтобы возмущение действия измерительного прибора на систему было пренебрежимо мало. Но это только в классическом приближении, на самом деле действие измерительного инструмента на объект не может быть сделано сколь угодно малым, так как их взаимодействие осуществляется дискретными квантами. Угол отклонения кванта света объектом точнее не определен т.е. передача импульса в процессе столкновения кванта с объектом должна рассматриваться как неконтролируемая величина. Таким образом, измерение положения в пространстве сопровождается неконтролируемым изменение импульса объекта. Т.е. выполняется принцип неопределенности Гейзенберга.

4 Дополнительные переменные. Совместные переменные

Описание явлений микроскопической физики осуществляется на основе дополнительных элементов, т.е. элементов, дополняющих друг друга при составлении классической картины явления, но определяемых с помощью взаимоисключающих экспериментальных устройств. Координата и импульс образуют пару дополнительных элементов в указанном выше смысле. точные измерения x и p требуют использования несовместимых измерительных устройств. Сам принцип дополнительности часто выражают в следующей, более строгой форме: описание физических свойств

микроскопических объектов на классическом языке требует использования пар дополнительных переменных, причем каждый член пары определяется тем точнее, чем менее точно определяется другой.
Мы скажем, что две динамические переменные являются совместными, если они могут быть одновременно точно определены. Особенно важную роль играют полные наборы совместных переменных $a, b, c...$; они составлены из попарно совместных переменных и обладают тем свойством, что любая другая переменная, совместная с каждой с каждой переменной набора, является функцией этих переменных $f(a, b, c, ..)$. Точное измерение полного набора совместных переменных системы дает тот максимум информации о системе, который вообще можно получить.