

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(СПбГУ)

Кафедра Общей физики-1  
Направление «Физика»



## КРИТЕРИИ ПЕРЕПУТАННОСТИ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Бакалаврская работа студента

**Смольникова Игоря Руслановича**

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., проф. **Ю.М. Голубев**

Рецензент:

к. ф.-м. н., доц. **Н.В. Ларионов**

Санкт-Петербург  
2017

# 1 Введение

Квантовая перепутанность — явление квантовой механики, в результате которого в перепутанных состояниях возникает скоррелированность квантовых состояний отдельных подсистем, обычно отвечающих отдельным физическим объектам, например фотонам или электронам. Изменение состояния одной подсистемы влечет за собой мгновенное (скорость взаимодействия подсистем выше скорости света) изменение состояния другой подсистемы. Идея существования квантово-перепутанных состояний была впервые высказана в совместной работе Эйнштейна, Подольского и Розена, описывающей так называемый "ЭПР-парадокс". Термин "entanglement" был позднее введен Эрвином Шредингером, для описания состояний, подобных тем, что описаны в ЭПР-парадоксе. Существует несколько принятых вариантов перевода данного термина на русский язык, в данной работе будет использоваться слово "перепутанность".

Квантовая перепутанность - это основной ресурс для реализации таких квантово-информационных протоколов, как квантовая телепортация, квантовые вычисления, квантовый повторитель, исправление квантовых ошибок и так далее. Кроме того, исследование квантовой перепутанности имеет фундаментальное значение, так как перепутанность — одно из явлений, возникающее только при квантовом описании явления.

Для успешной работы с перепутанными состояниями необходимо ввести критерии и меры, которые позволяют определить является ли конкретное состояние перепутанным и оценить степень его перепутанности. На основании таких оценок можно судить о пригодности того или иного состояния к применению в указанных протоколах квантовой информации.

Изучению критериев и мер перепутанности посвящена данная курсовая работа. Рассматриваются оценки перепутанности для дискретных переменных (для кубитов) и для непрерывных переменных (в базисе квадратурных переменных). В работе вводится понятие кубита, матрицы плотности, квантовой перепутанности, рассматриваются критерии частичного следа и Переса-Городецкого для определения того, является ли квантовое состояние перепутанным, вводятся меры фон Неймана и отрицательности для количественной оценки перепутанности, рассматривается понятие квантового дискорда, как альтернативной перепутанности меры скоррелированности квантовых состояний.

## 2 Кубит

Классический бит — это переменная, способная находиться в двух дискретных состояниях: 0 и 1. На операциях с битами строится вся классическая информатика, и соответственно все существующие алгоритмы для работы с классической информацией. Кубит[1] — квантовый аналог классического бита. Кубит описывается функциями состояния. Два возможных состояния кубита это  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ . Они соответствуют классическим состояниям бита — 0 и 1. Отличие кубита от классического бита состоит в том, что он может принимать состояния отличные от  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , а именно может находиться в линейной суперпозиции данных состояний:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Числа  $\alpha$  и  $\beta$ , называемые амплитудами вероятности, вообще говоря, являются комплексными. Состояния  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  являются векторами ортонормированного базиса в данном пространстве и называются состояниями вычислительного базиса. Таким образом, состояние кубита представляет собой вектор в комплексном двумерном пространстве. Если мы хотим измерить состояние классического бита, то мы просто "получаем" его состояние — 0 или 1. Для кубита все несколько сложнее. Допустим кубит находится в состоянии  $|\Psi\rangle$ , являющимся суперпозицией состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  с соответствующими коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда при

попытке измерить состояние кубита в базисе  $|0\rangle, |1\rangle$ , мы получим  $|0\rangle$  или  $|1\rangle$  с вероятностями  $|\alpha|^2$  и  $|\beta|^2$  соответственно. На коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  накладывается условие нормировки:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Таким образом кубит — единичный вектор в двумерном комплексном пространстве. Следует обратить внимание на то, что после измерения кубит переходит в измеренное состояние. То есть, если мы измерили состояние кубита  $|\Psi\rangle$  и получили  $|0\rangle$ , то в дальнейшем кубит находится в состоянии  $|0\rangle$ , а не  $|\Psi\rangle$ . Таким образом информация о первоначальном состоянии кубита теряется при измерении этого состояния. Важно заметить, что принципиально невозможно предсказать заранее, в какое из базисных состояний коллапсирует кубит. Даже вероятность коллапса в одно или другое состояние невозможно точно определить за конечное число измерений.

Кубит — физический объект, реализующийся посредством физических систем и явлений. Примеры используемых способов реализации кубита: две различные поляризации фотона, направления ядерного спина в однородном магнитном поле, спин электрона, энергетическое состояние электрона в атоме. Например рассмотрим атом, в котором электрон может находиться либо в основном, либо в возбужденном состояниях. Обозначим основное состояние, как  $|0\rangle$ , а возбужденное, как  $|1\rangle$ , тогда облучая атом светом соответствующей частоты можно перевести электрон из состояния  $|0\rangle$  в состояние  $|1\rangle$ , более того, уменьшая время облучения атома можно перевести электрон в состояние, являющееся суперпозицией состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ .

Из-за условия нормировки состояние кубита можно переписать в виде:

$$|\Psi\rangle = e^{i\gamma} \left( \cos \frac{\Theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\Theta}{2} |1\rangle \right)$$

Общий фазовый множитель можно опустить ввиду неразличимости состояний, отличающихся общей фазой.

Такое представление позволяет привести множество состояний кубита во взаимно однозначное соответствие со множеством точек на трехмерной сфере единичного радиуса, называемой сферой Блоха. Это представление позволяет удобно вводить унитарные операции над кубитом, как повороты вектора внутри сферы. В отличие от классической информатики, в которой существует единственная унитарная операция над битом — логическое отрицание, переводящая состояние 1 в состояние 0 и наоборот, состояние 0 в состояние 1, в случае кубитов унарных операций оказывается уже бесконечное множество, что представляет серьезное различие между квантовой и классической информацией.

Рассмотрим систему из двух кубитов. Каждый кубит имеет базовые состояния  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , тогда набор базовых состояний для системы из двух кубитов представляет собой 4 вектора:  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ , представляющие собой продукты тензорного произведения базовых состояний первого и второго кубитов. Состояние системы из двух кубитов записывается, как:

$$|\Psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

Где амплитуды вероятностей удовлетворяют условию нормировки:

$$\sum_{x \in \{0,1\}^2} |\alpha_x|^2 = 1$$

Если мы хотим измерить, например, только первый кубит, то мы получим 0 с вероятностью  $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$ , при этом система переходит в состояние:

$$|\Psi'\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$$

Знаменатель обеспечивает нормированность полученного состояния на единицу.

### 3 Чистые и смешанные состояния. Матрица плотности.

Чистое состояние квантовомеханической системы [2] [3] — состояние, которое может быть полностью представлено одним вектором состояния, в том числе, как линейной комбинацией базисных векторов. Однако информация о том, в каком конкретно состоянии находится квантовомеханическая система, не всегда может быть доступна. Часто из-за ограниченности информации о системе можно определить только набор возможных состояний системы с присущими им статистическими вероятностями. Это так называемый статистический ансамбль состояний системы. В отличие от линейной комбинации, статистический ансамбль не может быть представлен одним вектором состояния.

В дискретном случае можно записать в нотации Дирака такое представление матрицы плотности: пусть мы имеем набор состояний  $\phi_j$ , каждому из которых соответствует вероятность  $p_j$ , тогда матрица плотности будет иметь вид:

$$\rho = \sum_{j=1}^m p_j |\phi_j\rangle \langle \phi_j| = \sum_{j=1}^m p_j \rho_j$$

Оператор плотности должен обладать следующими свойствами:

1)  $Tr(\rho) = 1$ : Это свойство напрямую следует из определения матрицы плотности, и того факта, что

$$\sum_{j=1}^m p_j = 1$$

2) Все собственные значения  $\rho$  неотрицательны. Это следует из того факта, что ни одна вероятность  $p_j$  не может быть отрицательной. Это свойство будет важно в дальнейшем, так как оно предоставляет критерий определения того, перепутано ли данное двухчастичное состояние.

3)  $Tr(\rho^2) \leq 1$ : Это следует из того факта, что  $0 \leq p_j \leq 1$ . Это свойство может быть использовано для того, чтобы определить находится ли система в чистом ( $tr(\rho^2) = 1$ ) или смешанном ( $tr(\rho^2) < 1$ ) состоянии [2] [3]. Это можно понять, заметив, что для чистого состояния  $p_j = 1$ , и что  $p_j = 1$  только для чистого состояния.

4) Матрица плотности является эрмитовой, то есть она диагонализуема.

Рассмотрим действие унитарного оператора на квантовую систему. Пусть система находилась в состоянии  $|\psi_i\rangle$  с вероятностью  $p_i$ . В результате действия оператора  $U$  она окажется в состоянии  $U\psi_i$  с вероятностью  $p_i$ . Таким образом эволюция оператора плотности описывается уравнением:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \rightarrow \sum_i p_i U |\psi_i\rangle \langle \psi_i| U^\dagger = U \rho U^\dagger$$

Опишем процесс измерения на языке матрицы плотности. Пусть мы проводим измерение, описываемое операторами  $M_m$ . Если начальное состояние задано вектором  $|\psi_i\rangle$ , то вероятность получения результата  $m$  определяется выражением:

$$p(m|i) = \langle \psi_i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle = Tr(M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i|)$$

Из формулы полной вероятности:

$$p(m) = \sum_i p(m|i) p_i = \sum_i p_i Tr(M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = Tr(M_m^\dagger M_m \rho)$$

Если начальное состояние задавалось вектором  $|\psi_i\rangle$ , то состояние после получения результата  $m$  будет иметь вид:

$$|\psi_i^m\rangle = \frac{M_m|\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle\psi_i|M_m^\dagger M_m|\psi_i\rangle}}$$

Таким образом, после измерения, в результате которого был получен ответ  $m$ , имеем ансамбль состояний  $|\psi_i^m\rangle$  с соответствующими вероятностями  $p(i|m)$ . Соответствующий этому ансамблю оператор плотности  $\rho_m$  задается выражением:

$$\rho_m = \sum_i p(i|m)|\psi_i^m\rangle\langle\psi_i^m| = \sum_i p(i|m)\frac{M_m|\psi_i\rangle\langle\psi_i|M_m^\dagger}{\langle\psi_i|M_m^\dagger M_m|\psi_i\rangle}$$

Из теории вероятностей известно, что  $p(i|m) = p(m|i)p_i/p(m)$ , тогда окончательно получаем:

$$\rho_m = \sum_i p_i \frac{M_m|\psi_i\rangle\langle\psi_i|M_m^\dagger}{Tr(M_m^\dagger M_m \rho)} = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{Tr(M_m^\dagger M_m \rho)}$$

Описание при помощи матрицы плотности является наиболее общей формой описания квантовомеханических систем. Описание вектором состояния — частный случай описания матрицей плотности. Для чистого состояния всегда существует полная система измерений, достоверно приводящих к определенным результатам, то есть  $\Psi$  является собственной функцией какого-либо оператора, для смешанных состояний подобное утверждение не верно, поскольку такой системы измерений не существует.

## 4 Квантовая перепутанность. Состояния Белла.

Квантовая перепутанность — уникальное явление квантовой механики, впервые описанное Эрвином Шрёдингером в 1935 году [17]. Перепутанная система состоит из двух или более подсистем, чей полный вектор состояния не может быть полностью получен, как тензорное произведение отдельных векторов состояний этих подсистем. Таким образом только свойства системы в целом могут быть полностью описаны полным вектором состояния. Подсистема же не может быть описана полностью из-за отсутствия вектора состояния, ей соответствующего. То есть не существует определенного состояния такой подсистемы. Отсюда название "перепутанность" — перепутанные состояния не являются независимыми друг от друга, а коррелируют друг с другом таким образом, чтобы сохранить поведение системы в целом. Любое действие над одной из подсистем изменяет не только состояние самой подсистемы, но и незамедлительно все остальные подсистемы. Для перепутанной системы из двух частиц результат измерения системы, связанной с первой частицей, имеет свойство влиять на результат аналогичного измерения над системой, связанной со второй частицей. Причем это влияние происходит мгновенно вне зависимости от расстояния, на которое разнесены частицы. Это, казалось бы невероятное свойство дальнего действия называется ЭПР-парадоксом, в честь ученых Эйнштейна, Подольского, Розена [11].

Рассмотрим систему из двух кубитов. Пусть эта система находится в состоянии:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Предположим, что мы измерили состояние первого кубита, и в результате измерения получили  $|0\rangle$ . Вектор состояния системы таким образом коллапсировал в вектор  $|00\rangle$  таким образом

измерив состояние первого кубита мы автоматически определили состояние второго кубита —  $|0\rangle$ , хотя до проведения измерения второй кубит, будучи измеренным мог бы оказаться как в состоянии  $|1\rangle$ , так и в состоянии  $|0\rangle$ . Как можно видеть результат измерения состояния первого кубита всегда гарантирует нам результат измерения второго кубита. В данном случае они всегда обязаны совпадать. Таким образом результат второго измерения полностью коррелирует с первым. Существует еще 3 подобных состояния, называемых, вместе с рассмотренным, состояниями Белла:

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Согласно теореме Белла корреляция измерений двух систем в таких состояниях "сильнее" любой корреляции, существующей между классическими системами.

Рассмотрим подробнее математический аппарат квантовой механики при работе с системами из двух частиц [3]. Вектор состояния пары частиц существует в пространстве:

$$H = H_1 \otimes H_2$$

Здесь  $H_1$  и  $H_2$  — Гильбертовы пространства двух перепутанных частиц. " $\otimes$ " — операция тензорного произведения.

Состояния в этом пространстве могут быть записаны, как линейная комбинация векторов нового базиса, построенного, как тензорное произведение линейных комбинаций базисов начальных пространств. Например, если базисы  $H_1$  и  $H_2$  это соответственно:

$$\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots\}, \{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots\}$$

То новый базис в пространстве  $H$  будет иметь вид:

$$\{|a_1\rangle \otimes |b_1\rangle, |a_1\rangle \otimes |b_2\rangle, |a_2\rangle \otimes |b_1\rangle, |a_2\rangle \otimes |b_2\rangle, \dots\}$$

В этом базисе существует множество состояний, называемых "разделяемыми состояниями" которые выражаются, как:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

То есть такие состояния могут быть записаны, как тензорное произведение двух векторов состояния из гильбертовых пространств, соответствующих первой и второй частице соответственно. То есть такие состояния не являются перепутанными по определению. Пример такого состояния:  $|00\rangle$ , которое является продуктом тензорного произведения векторов  $|0\rangle$  и  $|0\rangle$ . Состояние квантовомеханической системы может быть либо перепутанным, либо разделяемым. Чтобы система из двух частиц была разделяемой, ее матрица плотности должна иметь вид:

$$\rho = \sum_{j=1}^m p_j \rho_1^j \otimes \rho_2^j$$

Так как если состояние системы не может быть записано, как тензорное произведение двух состояний подсистем, то такое состояние перепутано по определению. Такая запись — всего лишь расширение определения разделяемого состояния для смешанных состояний. Здесь  $p_j$  это вероятность найти состояния  $\rho_1^j$  и  $\rho_2^j$  в ансамбле.

## 5 Метод редуцированной матрицы плотности.

Состояние, отвечающее любой системе из множества частиц содержит в себе полную информацию о системе в целом. Однако часто требуется только информация о какой-либо части системы, например спин какой-либо одной частицы. Верное представление подсистемы, входящей в подобную полную систему — редуцированная матрица плотности. Редуцированную матрицу плотности можно получить, взяв частичный след от матрицы плотности всей системы, исключая интересующую нас подсистему.

Рассмотрим систему из двух частиц. Обозначим подсистемы, отвечающие каждой частице, соответственно А и В. Тогда редуцированная матрица плотности  $\rho^A$  подсистемы А имеет вид [3]:

$$\rho^A = Tr_B(\rho^{AB})$$

Здесь  $\rho^{AB}$  это матрица плотности всей системы, состоящей из подсистем А и В, а  $tr_B(\rho^{AB})$  это операция взятия частичного следа, соответствующего подсистеме В.

Опишем операцию взятия частичного следа. Любая матрица плотности системы из двух частиц может быть записана в виде линейной комбинации вида:

$$\rho^{AB} = \sum_{i,j,k,l} c_{i,j} c_{k,l}^* (|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle) (\langle a_k| \otimes \langle b_l|)$$

Здесь

$$\sum_{i,j} |c_{i,j}|^2 = 1$$

$$\sum_{k,l} |c_{k,l}^*|^2 = 1$$

$|a_i\rangle$  и  $|b_j\rangle$  — элементы ортонормированных базисов  $H_A$  и  $H_B$  соответственно. Тогда операция взятия частичного следа от системы В имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho^A = Tr_B(\rho^{AB}) &= \sum_{i,j,k,l} c_{i,j} c_{k,l}^* (|a_i\rangle \langle a_k|) \otimes tr(|b_j\rangle \langle b_l|) = \sum_{i,j,k,l} c_{i,j} c_{k,l}^* (|a_i\rangle \langle a_k|) \otimes \langle b_l| b_j \rangle = \\ &= \sum_{i,k,l} c_{i,l} c_{k,l}^* (|a_i\rangle \langle a_k|) \end{aligned}$$

Редуцированная матрица плотности указывает на связь между перепутанностью и смешанностью состояний. Редуцированная матрица плотности системы из двух частиц определяет смешанное состояние тогда и только тогда, когда полная система находится в перепутанном состоянии. Это легко понять, если заметить, что для перепутанного состояния нельзя построить вектор состояния подсистемы, следовательно мы не обладаем полной информацией о подсистеме, следовательно она может представлять собой только смешанное состояние.

Применим этот аппарат к состоянию Белла, про которое нам уже известно, что оно является перепутанным:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 00| + \langle 11|) = (|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)/2$$

Возьмем частичный след от подсистемы 2:

$$\rho^1 = Tr_2(\rho) = \frac{1}{2} [|0\rangle\langle 1| Tr(|0\rangle\langle 0|) + |1\rangle\langle 0| Tr(|1\rangle\langle 1|) + |1\rangle\langle 1| Tr(|0\rangle\langle 0|) + |1\rangle\langle 1| Tr(|1\rangle\langle 1|)] =$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{I}{2}$$

Редуцированная матрица плотности отвечающая подсистеме 1 — половина единичной матрицы  $I$ , что представляет собой максимально смешанное состояние, так как оно в одинаковой степени состоит из чистых состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ . Логично предположить, что максимально смешанному состоянию подсистемы соответствует максимально перепутанное состояние системы в целом. Действительно, состояния Белла считаются максимально перепутанными состояниями в квантовой механике.

Согласно Шрёдингеру максимальное количество доступной информации о перепутанной системе — это полное состояние системы. Как мы можем видеть попытка определить состояние подсистемы посредством взятия частичного следа действительно приводит нас к смешанному состоянию, что как раз и показывает нехватку информации о подсистеме рассматриваемой системы.

## 6 Энтропия фон Неймана. Переход от классической энтропии.

Явление перепутанности связано с информацией, которую мы можем получить о системе, а значит при описании критериев перепутанности квантовых состояний следует дать более формальное определение информации. Энтропия — хороший вариант "меры" для информации. В теорию информации понятие энтропии было введено Клодом Шенноном и Джоном фон Нейманом [5][8]. Энтропия — также характеристика системы в термодинамике и статистической физике. Информационная и физическая энтропия связаны. Одной из важнейших идей теории квантовой информации является представление о том, что степень беспорядка физической системы напрямую связана с информацией об этой системе (информационной энтропией). Существует много различных типов энтропий. В дальнейшем будет рассматриваться Энтропия фон Неймана.

Энтропия фон Неймана — это обобщение классической информационной энтропии на квантово-механические системы. Дадим математическое определение энтропии фон Неймана:

$$S = -Tr(\rho \log_2 \rho)$$

Здесь  $S$  — энтропия фон Неймана, а  $\rho$  — матрица плотности, отвечающая рассматриваемому состоянию. Дополнительно определяется, что  $S = 0$  при  $\rho = 0$ . На практике матрицу  $\rho$  следует диагонализировать перед взятием логарифма и следа, так как это сильно упрощает процесс вычислений, однако математически в этом нет необходимости, то есть результат не изменится, это делается для упрощения вычислений, что будет показано в дальнейшем.

Определитель матрицы равен произведению ее собственных значений, след матрицы — сумма собственных значений матрицы, след произведения матриц — сумма произведений соответствующих собственных значений матриц, операция диагонализации не меняет собственных значений матрицы, а следовательно не меняется набор собственных значений логарифма определителя и, наконец, не меняется значение следа, то есть действительно диагонализация не влияет на результат формулы [6] [7].

Покажем связь формулы Шеннона и энтропии в квантовой теории информации. Введем информацию, как функцию, обладающую следующими естественными свойствами:

1)

$$I(p) \geq 0$$

Здесь  $p$  — вероятность события. Для информации должна быть естественна неотрицательность, так как не должно существовать событий, несущих отрицательную информацию.



2)

$$I(1) = 0$$

Всегда происходящие события не несут информации.

3)

$$I(p_1 p_2) = I(p_1) + I(p_2)$$

Информация от независимых источников должна быть аддитивна.

На роль такой функции подходит логарифм. Рассмотрим пример: пусть у одного события  $n$  равновероятных исходов, а у другого  $m$  равновероятных исходов, тогда первое событие однозначно кодируется через  $\log_2(n)$  битов, а второе — через  $\log_2(m)$  битов. Для двух событий вместе —  $nm$  исходов, соответственно:

$$\log_2(nm) = \log_2(n) + \log_2(m)$$

Вероятность одного события в первом случае —  $\frac{1}{n}$ , а во втором —  $\frac{1}{m}$ . Отсюда:

$$I(p) = \log_2\left(\frac{1}{p}\right) = -\log_2(p)$$

Рассмотрим распределение, где событие  $i$  имеет вероятность  $p_i$ , пусть проведено  $N$  экспериментов, тогда количество событий  $i$  равно  $Np_i$ . Полная информация от эксперимента:

$$-\sum_i Np_i \log_2(p_i)$$

Тогда средняя информация от каждого события:

$$-\sum_i p_i \log_2(p_i)$$

Эта формула называется формулой Шеннона. Натуральный логарифм и логарифм по основанию 2 отличаются домножением на постоянный коэффициент, который легко выносится за знак следа, следовательно дальнейшие формулы, применимые для натурального логарифма верны и для логарифма по основанию 2, поэтому мы не станем показывать переходы от формул для натурального логарифма, а сразу будем использовать в формулах логарифм по основанию 2, подразумевая это свойство. Нам понадобятся следующие факты:

1)

$$Tr(AB) = \sum_i a_i b_i$$

Здесь  $A$  и  $B$  — матрицы,  $a_i$  и  $b_i$  — соответствующие этим матрицам собственные значения. Это свойство легко доказывается для диагональных матриц, а так как мы знаем, что диагонализация не меняет собственных значений, то это верно для любых диагонализуемых матриц, которой как раз и является матрица плотности.

2) Собственные значения логарифма диагональной матрицы — логарифмы соответствующих собственных значений этой матрицы. Логарифм матрицы с неотрицательными собственными значениями однозначно определен, диагонализация не меняет собственные значения логарифма матрицы. Для диагонализуемой матрицы  $A$ , такой что  $A' = V^{-1}AV$ , где  $A'$  — диагональная матрица верное следующее:

$$\log_2 A = V \log_2 A' V^{-1}$$

Операция подобия сохраняет собственные значения матрицы, следовательно и обратная операция сохраняет собственные значения матрицы.

Собственные значения  $c_i$  матрицы плотности — вероятности найти систему в состоянии  $\psi_i$ , то есть вероятность такого события, что система окажется в состоянии  $\psi_i$ . Окончательно видим:

$$S = -\text{tr}(\rho \log_2 \rho) = -\sum_i c_i \log_2(c_i)$$

Здесь  $c_i$  полностью аналогичны вероятностям событий  $p_i$  в формуле Шеннона, таким образом показана связь, между классической и квантовой энтропиями.

Легко видеть, что энтропия любого чистого состояния равна 0, так как вероятность такого события равна единице. Понятно, что это наименьшее значение энтропии, так как она по определению неотрицательна. Более того энтропия равна 0, только если состояние — чистое. Энтропия максимальна, если все события из набора равновероятны, т.е. для количества событий  $n$  все собственные числа матрицы плотности равны  $\frac{1}{n}$ . То есть максимальное значение энтропии для системы с матрицей плотности  $n \times n$  будет:

$$S = -n\left(\frac{1}{n} \log_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \log_2(n)$$

Таким образом, получаем интересное свойство энтропии фон Неймана: энтропия чистого перепутанного состояния всегда равна нулю, при этом энтропия любой его подсистемы больше нуля, так как редуцированные матрицы плотности этих подсистем отвечают смешанным состояниям [3]. Вообще говоря, возможны случаи, когда сумма энтропий подсистем больше полной энтропии перепутанной системы. Это свойство называется "субаддитивностью" и оно присуще любому чистому перепутанному многочастичному состоянию. Таким образом, энтропия фон Неймана может быть использована в качестве меры перепутанности чистого состояния системы из двух частиц.

## 7 Критерий Переса-Городецкого.

Мы показали, что метод редуцированной матрицы плотности показывает, является ли чистое состояние перепутанным, или нет. Однако этот метод не годится для смешанных состояний. Существует более универсальный критерий, который позволяет определить, является ли состояние перепутанным, вне зависимости от того, является ли оно чистым. Этот критерий называется критерием Переса-Городецкого [3] [9] [10]. Критерий был предложен Пересом в 1996 году, как необходимое условие для разделимости любого квантово-механического состояния. Позднее Городецким было показано, что критерий является также достаточным условием для разделяемых систем размерности  $2 \times 2$  и  $2 \times 3$ . Таким образом для системы из двух кубитов, являющейся системой размерности  $2 \times 2$ , этот критерий точно устанавливает, является ли состояние перепутанным или разделяемым [9].

Опишем данный критерий. Для любого физического состояния матрица плотности должна быть неотрицательно определена, то есть все ее собственные числа больше или равны нулю, поскольку они представляют собой набор реальных вероятностей. Рассмотрим разделяемое состояние:

$$\rho = \sum_{j=1}^m p_j \rho_{1j} \otimes \rho_{2j}$$

Чтобы соответствовать реальному физическому состоянию все матрицы плотности должны быть неотрицательно определены. Пусть  $T$  — оператор транспонирования, то есть:

$$T(A) = A^T$$

Здесь  $A$  — произвольная квадратная матрица. Тогда применение оператора транспонирования только к первой подсистеме эквивалентно применению оператора частичного транспонирования  $T \otimes I$  ко всей системе. Здесь  $I$  — единичный оператор. Отсюда получаем:

$$\rho^{T_1} = (T \otimes I)\rho = \sum_{j=1}^m p_j T(\rho_{1j}) \otimes I(\rho_{2j}) = \sum_{j=1}^m p_j \rho_{1j}^T \otimes \rho_{2j}$$

Транспонирование не меняет собственных значений матрицы, следовательно  $\rho_{1j}^T$  все еще должна оставаться неотрицательно определенной. Тогда  $\rho_{1j}^T$  тоже является матрицей, описывающей физическое состояние. Утверждается, что  $\rho^{T_1}$  тоже является матрицей плотности, отвечающей реальной разделяемой двухчастичной системе, а значит должна быть неотрицательно определенной. Очевидно, что если это выполняется, то существуют матрицы плотности, описывающие реальное физическое состояние подсистемы, а значит состояние рассматриваемой системы — разделяемое. В этом и состоит критерий Переса-Городецкого: любое реальное разделяемое физическое состояние сохраняет неотрицательную определенность своей матрицы плотности при применении к ней оператора частичного транспонирования. Как было сказано раньше, для системы из двух кубитов это необходимое и достаточное условие перепутанности системы. То есть системы, не удовлетворяющие этому критерию, то есть имеющие хотя бы одно отрицательное собственное значение своей матрицы плотности при применении к ней оператора частичного транспонирования — перепутанные системы.

Рассмотрим состояние:

$$\rho = p|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + (1-p)\frac{I}{4}$$

Здесь  $p \in (0, 1)$  - вероятность,

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle),$$

$$|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| = \frac{1}{2}[(|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|) + (|0\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0|) + (|1\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 1|) + (|1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|)].$$

Рассматриваемое состояние называется состоянием Вернера. Оно является смешанным состоянием, представляющим собой "смесь" максимально перепутанного состояния — состояния Белла  $|\Psi^+\rangle$ , и максимально смешанного состояния — единичной матрицы  $I$ .  $p$  является параметром этой смеси. Состояние становится чистым при  $p=1$ . Найдем  $p = p_{crit}$  при котором наша система переходит из перепутанного состояния в разделяемое и наоборот. Перепишем матрицу плотности в виде:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \langle 0| &\rightarrow (1 \ 0) \\ |1\rangle &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \langle 1| &\rightarrow (0 \ 1) \\ |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\rho = p|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + (1-p)\frac{I}{4} =$$

$$= \frac{1}{2^2} p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(1-p)}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+p & 2p & 0 \\ 0 & 2p & 1+p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}.$$

Эта матрица плотности должна быть неотрицательно определена, т.е. все ее собственные значения должны быть неотрицательны. Применим частичное транспонирование к первой подсистеме. Получим:

$$T(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|) = \frac{1}{2} [ (|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|) + (|1\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 0|) + (|0\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 1|) + (|1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|) ]$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \rho^{T_1} &= \frac{1}{2^2} p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(1-p)}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & 2p \\ 0 & 1+p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+p & 0 \\ 2p & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Согласно критерию Переса-Городецкого  $\rho$  отвечает разделяемому состоянию тогда и только тогда, когда  $\rho$  и  $\rho^{T_1}$  неотрицательно определены, и отвечает перепутанному состоянию, если существует хотя бы одно отрицательное собственное значение. То есть точкой перехода между перепутанным и разделяемым состояниями является наименьшее положительное значение  $p$ , которое делает одну из этих матриц сингулярной, то есть одно из собственных значений этих матриц обращается в 0. Это значит, что определитель такой матрицы будет нулевым. Таким образом точку перехода можно найти, как наименьшее положительное решение среди уравнений:

$$\begin{aligned} \det(\rho) &= 0 \\ \det(\rho^{T_1}) &= 0 \end{aligned}$$

Для данного случая, уравнение для  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \det(\rho) &= 0 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^4 (1-p)[(p+1)^2(1-p) - (1-p)(2p)^2] &= 0 \\ (1-p)^2[(p+1)^2 - 4p^2] &= 0 \\ (1-p)^3(3p+1) &= 0 \end{aligned}$$

Уравнение для  $\rho^{T_1}$ :

$$\begin{aligned} \det(\rho^{T_1}) &= 0 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^4 [(1-p)^2(p+1)^2 - (2p)^2(p+1)^2] &= 0 \\ (1-p)^2(1+p)^2 - (2p)^2(p+1)^2 &= 0 \\ (p+1)^3(1-3p) &= 0 \end{aligned}$$

Легко видеть, что наименьшее положительное значение  $p$ , то есть точка перехода от разделяемого к перепутанному состоянию — это  $p_{crit} = \frac{1}{3}$ . Любое состояние, для которого  $p > p_{crit}$  является перепутанным.

## 8 Мера фон Неймана для чистых состояний

[3]

Были продемонстрированы методы определения того, является ли данное состояние разделяемым или перепутанным. Следующим разумным шагом при рассмотрении явления квантовой перепутанности будет ввести некоторую меру, определяющую степень этой перепутанности, что дало бы возможность сравнивать перепутанные состояния между собой. В качестве варианта такой меры для чистого состояния системы из двух частиц используется рассмотренная ранее энтропия фон Неймана.

Суть меры через энтропию фон Неймана состоит в том, что предполагается, что степень перепутанности подсистемы с другой подсистемой прямо пропорциональна энтропии вычисленной с использованием соответствующей редуцированной матрицы плотности. Можно доказать, что энтропии обеих таких подсистем совпадают, а следовательно совпадают и их степени перепутанности. Значит степень перепутанности можно приписать системе в целом.

Продemonстрируем, используя данный критерий, что, как и утверждалось ранее, состояние Белла  $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle)$  является максимально перепутанным состоянием.

$$\rho = |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| = \frac{1}{2}[(|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|) + (|0\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0|) + (|1\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 1|) + (|1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|)]$$

Найдем редуцированную матрицу подсистемы 1:

$$\rho^1 = Tr_2(\rho) = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

Это диагональная матрица. Следовательно диагональные элементы равны собственным значениям. Так как оба собственных значения равны, у такой матрицы плотности максимальная энтропия, что было показано ранее. Значит, по определенной нами мере, состояние Белла является максимально перепутанным, что и утверждалось до этого. Вычислим энтропию первой подсистемы:

$$S_1 = -Tr(\rho^1 \log_2 \rho^1) = -2 \times \frac{1}{2} \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 2 = 1$$

Это и есть степень перепутанности подсистемы 1, в данном случае являющейся максимальной. Энтропия фон Неймана равна 0 для разделяемого состояния и возрастает вплоть до единицы для максимально перепутанного состояния, такого как, например, состояния Белла. Можно показать, что для чистого состояния степень перепутанности первой и второй системы равны.

Энтропия фон Неймана является единственной мерой перепутанности для чистого состояния системы из двух частиц. Энтропию фон Неймана можно также использовать, как меру перепутанности любого чистого состояния, однако эта мера не подходит для смешанных состояний.

## 9 Отрицательность

[3]

Критерий Переса-Городецкого может быть также использован для обоснования меры перепутанности, называемой "отрицательностью". Отрицательность может быть использована, как мера перепутанности для кубитов. Критерий Переса-Городецкого утверждает, что все собственные значения частично транспонированной матрицы плотности должны быть

неотрицательны для любого разделяемого состояния. Для системы кубитов также известно, что любому перепутанному состоянию отвечает по меньшей мере одно отрицательное собственное число частично транспонированной матрицы плотности. Идея отрицательности, как меры, состоит в том, чтобы просуммировать все отрицательные собственные значения частично транспонированной матрицы плотности рассматриваемого состояния. Запишем это в виде математического выражения:

$$\varepsilon(\rho) = 2 \sum_i (-\lambda_i^-)$$

Здесь  $\varepsilon(\rho)$  — это отрицательность,  $\lambda_i^-$  — отрицательные собственные значения матрицы  $\rho$ . Так как  $\text{tr}\rho = 1$ , то полагается, что  $0 \leq \varepsilon(\rho) \leq 1$ .

Применим эту меру к состоянию Белла:

$$\rho^{T_i} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь  $\rho^{T_i}$  — частично транспонированная по первой подсистеме матрица плотности состояния Белла. Собственные значения такой матрицы:  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ . Таким образом, сумма отрицательных собственных значений частично транспонированной матрицы плотности —  $-\frac{1}{2}$ , и отрицательность  $\varepsilon(\rho) = 2 \times (-(-\frac{1}{2})) = 1$ .

Как и в случае с энтропией фон Неймана получаем, что состояние Белла — максимально перепутанное состояние.

## 10 Переход к непрерывному базису

Переход от дискретных переменных к непрерывным сопровождается переходом от суммы к интегралу в разложении данного вектора по заданному базису. Рассмотрим пример разложения вектора по непрерывному координатному базису:

$$|\Psi\rangle = \int dx \phi(x) |x\rangle$$

Здесь  $|x\rangle$  — непрерывный координатный базис.

$|\phi(x)|^2$  — плотность вероятности.

Для любого непрерывного базиса верно, что:

$$|\phi(x')|^2 = |\langle x' | \Psi \rangle|^2$$

Собственные состояния непрерывных базисов не принадлежат гильбертову пространству, поскольку  $\langle x' | x \rangle = \delta(x - x')$ , а следовательно они не нормируются, следовательно базисные состояния не являются физическими состояниями сами по себе, но могут быть базисом для физических состояний.

## 11 Операторы рождения и уничтожения. Квадратурные операторы.

Рассмотрим гармонический осциллятор. В гармоническом осцилляторе уровни энергии дискретны и отстоят друг от друга на равные величины. Для описания состояния осциллятора

удобно ввести энергетический базис, где  $|0\rangle$  — невозбужденное состояние,  $|1\rangle$  — следующее по энергии состояние, и так далее. Для любого состояния  $|n\rangle$  верно следующее:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

Это так называемые состояния Фока [2]. Здесь  $a$  — оператор уничтожения, а  $a^\dagger$  — оператор рождения.

Коммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения:

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$[a^\dagger, a] = -1$$

Из-за некоммутативности операторов рождения и уничтожения важен порядок применения операторов. Нормальный порядок операторов — сначала применяются операторы уничтожения, а затем рождения. Антинормальный порядок — сначала применяются операторы рождения, а затем уничтожения. Симметрический порядок — применяется линейная комбинация, в равной степени использующая нормальный и антинормальный порядки. Пример симметрического порядка для оператора  $(bb^\dagger)^2$ :  $S(bb^\dagger)^2 = \frac{1}{3}(bb^\dagger^2 + b^\dagger bb^\dagger b + b^\dagger^2 b)$ .

В терминах операторов импульса  $\hat{p}$  и координаты  $\hat{x}$  операторы рождения и уничтожения могут быть записаны в следующем виде:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} + i\hat{p})$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} - i\hat{p}).$$

Здесь  $\omega$  — угловая частота осциллятора. Из данной записи получим выражения для операторов импульса и координаты:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a + a^\dagger)$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a - a^\dagger)$$

Отсюда коммутационное соотношение между  $\hat{x}$  и  $\hat{p}$  имеет вид:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Определим два новых оператора на основе операторов рождения и уничтожения:

$$\hat{X} = \text{Re}(a) = \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}\hat{x}$$

$$\hat{P} = \text{Im}(a) = \sqrt{\frac{1}{\hbar\omega}}\hat{p}$$

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i$$

Операторы  $\hat{X}$  и  $\hat{P}$  называются квадратурными. Так как они отличаются от операторов координаты и импульса только числовым множителем, то в дальнейшем квадратурные операторы будут обозначаться как  $\hat{x}$  и  $\hat{p}$ .

## 12 Колебательные моды

Электромагнитная волна — сумма осциллирующих электромагнитных полей. При помощи разложения в ряд Фурье любая "хорошая" функция может быть представлена в виде суммы гармонических колебаний, являющихся характерным движением гармонических осцилляторов. Гармонические осцилляторы характеризуются своей характерной частотой. Отдельные частоты определяются модами колебаний. То есть электромагнитная волна может быть представлена в виде суперпозиции мод.

## 13 Распределение Вигнера

Поскольку в квантовой механике существует принцип неопределенности Гейзенберга, то невозможно одновременно точно определить импульс и координату. В классической физике статистические характеристики ансамбля состояний можно определять из вероятностного распределения в фазовом пространстве. Аналог ансамбля в квантовой механике — смешанное состояние, описываемое матрицей плотности. Однако в классической механике возможно единственное вероятностное распределение в фазовом пространстве, а в квантовой механике возможно множество различных распределений, отвечающих одной и той же матрице плотности[14]. Этот факт — следствие некоммутативности операторов рождения и уничтожения. Каждое распределение наиболее подходит определенному типу операторов. Наиболее часто используемые распределения: Р-функция Глаубера, функция Вигнера и Q-функция Хусими. Р-функция и Q-функция — наиболее подходящие распределения для нормального и антинормального порядка операторов соответственно. Распределение Вигнера наиболее подходит для симметрически упорядоченных операторов. Следовательно функция Вигнера наиболее подходит для квадратурных операторов.

Общий вид распределения Вигнера для матрицы плотности одиночной системы:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \int dy (e^{2iyp} \langle x - y | \rho | x + y \rangle)$$

Здесь  $x$ ,  $y$  и  $p$  — квадратуры. Интеграл берется по всему пространству. Функция Вигнера  $W$  обладает следующими свойствами[14][13]:

$$\iint W(x, p) dx dy = 1$$

$$\int W(x, p) dx = \langle p | \rho | p \rangle$$

$$\int W(x, p) dp = \langle x | \rho | x \rangle$$

Первое свойство - условие нормировки вероятности, второе и третье - получение маргинальных распределений. Получение  $n$ -ного статистического момента оператора  $M$  при помощи функции Вигнера определяется следующим образом:

$$\langle \hat{M}^n \rangle = Tr(\rho \hat{M}^n) = \iint W(x, p) M^n(x, p) dx dp$$

Здесь  $M(x, p)$  — уникальная функция, определенная в фазовом пространстве однозначно соответствующая оператору  $\hat{M}$ .

Пусть  $S(\hat{x}^m, \hat{p}^n)$  — симметрически упорядоченный оператор. Тогда существует линейное соотношение между квантовым и классическим операторами, определенными на фазовом



пространстве, называемое соответствием Вейля[18], выражаемое через функцию Вигнера следующим образом:

$$\langle S(\hat{x}^m, \hat{p}^n) \rangle = \text{tr}(\rho S(\hat{x}^m, \hat{p}^n)) = \iint W(x, p) x^m p^n dx dp$$

Следует отметить, что распределение Вигнера не является истинным вероятностным распределением, а является квазивероятностным распределением, так как оно не неотрицательно определено. Однако такое распределение хорошо описывает квантовые ансамбли в фазовом пространстве, поэтому оно в дальнейшем будет использовано для расширения критерия Переса-Городецкого на системы в непрерывных переменных.

## 14 Гауссовы состояния

Гауссово состояние определяется, как состояние, функция Вигнера которого является функцией Гаусса. Функция Гаусса в общем виде имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Здесь  $\mu$  — математическое ожидание случайной величины  $x$ , а  $\sigma^2$  — дисперсия величины  $x$ . То есть математического ожидания и дисперсии достаточно, чтобы описать такое состояние. Существует три важных подкласса Гауссовых состояний: тепловое, когерентное и сжатое состояния.

Тепловое состояние возникает, когда рассматриваемая система находится в термодинамическом равновесии. То есть единственная доступная информация о системе — это ее температура. Таким образом это максимально смешанное состояние с данной энергией — квантовый канонический ансамбль, который, очевидно, нельзя представить при помощи вектора состояния. Тепловое состояние — хорошее приближение вакуума при ненулевой температуре. Матрица плотности теплового состояния при температуре  $T$  имеет следующий вид:

$$\rho = \frac{\exp(-\beta\hat{H})}{\text{Tr}[\exp(-\beta\hat{H})]}$$

Здесь  $\hat{H}$  — оператор Гамильтона, а  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ . Для одиночной моды получаем:

$$\rho = \frac{\exp(-\beta\hbar\omega\hat{n})}{\text{tr}[\exp(-\beta\hbar\omega\hat{n})]}$$

Здесь  $\omega$  — частота моды, а  $\hat{n}$  — оператор номера. Подставив данную матрицу плотности в распределение Вигнера, получим:

$$W_{th}(x, p) = \frac{1 - e^{-\omega\beta}}{\pi(1 + e^{-\omega\beta})} \exp\left[\frac{-(1 - e^{-\omega\beta})}{1 + e^{-\omega\beta}}(x^2 + p^2)\right].$$

Действительно, оказывается, что распределение Вигнера для одиночной моды теплового состояния является функцией Гаусса.

Рассмотрим когерентное состояние. Когерентное состояние  $|\alpha\rangle$  получается из вакуумного состояния  $|0\rangle$  путем применения к нему оператора Глаубера[13]  $\hat{D}(\alpha)$  следующим образом:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle.$$

Сам оператор Глаубера определяется следующим образом:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}.$$

Когерентное состояние является собственным состоянием оператора уничтожения, то есть:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Так как  $\hat{a} = \left(\frac{\hat{x}+i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right)$ , то  $\alpha$  можно выразить через квадратурные операторы, как  $\alpha = \frac{x+ip}{\sqrt{2}}$ .

Матрица плотности одиночной моды когерентного состояния выражается как  $\rho = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ , можно доказать, что для такой матрицы плотности соответствующая функция Вигнера будет иметь вид:

$$W_{co}(x, p) = \frac{4}{\pi} e^{-\frac{1}{2}|(x^2+p^2)|}.$$

Как можно видеть, это также функция Гаусса.

Рассмотрим сжатые состояния. Сжатые состояния это состояния для которых отклонение одной из квадратур ( $\hat{x}$  или  $\hat{p}$ ) менее  $\frac{1}{2}$ , что является нижней границей отклонения как для теплового, так и для когерентного состояний. Соответственно отклонение второй квадратуры растет так, чтобы соблюдался принцип неопределенности Гейзенберга ( $\sigma_x\sigma_p \geq \frac{1}{4}$ ). Неопределенность системы равна занимаемой ей площади в фазовом пространстве. Сжатое состояние образует эллипс в фазовом пространстве, в то время как вакуумное и когерентное состояние образуют круги. Таким образом применив оператор сжатия к когерентному состоянию мы получим эллипс той же площади, что и круг, существовавший до сжатия. Оператор сжатия имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(\zeta) &= e^{-\frac{\zeta}{2}\hat{a}^{\dagger 2} + \frac{\zeta^*}{2}\hat{a}^2} = \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\hat{a}^{\dagger 2}\exp(i\phi)\text{th}(r)\right]\exp\left[-\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)\ln(\text{ch}(r))\right]\exp\left[\frac{1}{2}\hat{a}^2\exp(-i\phi)\text{th}(r)\right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\zeta = re^{i\phi}$ , а  $\phi$  и  $r$  — вещественные числа, характеризующие оператор.

Одномодовое сжатое состояние получается из вакуумного состояния  $|0\rangle$  при помощи оператора сжатия следующим образом:

$$|\zeta\rangle = \hat{S}(\zeta)|0\rangle.$$

Можно доказать, что функция Вигнера одномодового сжатого вакуумного состояния при  $\phi = 0$  имеет вид:

$$W_{sq}(x, p) = \frac{2}{\pi} \exp[-2[\exp(-2r)p^2 + \exp(2r)x^2]].$$

Как можно видеть, это тоже функция Гаусса.

## 15 Гауссово перепутывание

Определим разделяемое состояние в системе в непрерывных переменных. Состояние системы из двух частиц является разделяемым, то его можно записать в следующем виде:

$$\rho = \sum_j p_j \rho_1^j \otimes \rho_2^j.$$

Состояние которое не может быть записано в таком виде является перепутанным.

## 16 Критерий Переса-Городецкого для систем в непрерывных переменных

Данный критерий разделяемости является обобщением критерия Переса-Городецкого на системы с непрерывным базисом [10]. Рассмотрим двухмодовую систему с непрерывным базисом и матрицей плотности  $\rho$ . Функция Вигнера для такой системы будет иметь вид:

$$W(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{1}{\pi^2} \iint dy_1 dy_2 (e^{2i(y_1 p_1 + y_2 p_2)}) \times \sum_j p_j \langle x_1 - y_1 | \rho_1^j | x_1 + y_1 \rangle \otimes \langle x_2 - y_2 | \rho_2^j | x_2 + y_2 \rangle$$

Здесь  $x_1, x_2, p_1$  и  $p_2$  — квадратурные переменные. Применим операцию частичного транспонирования, транспонировав вторую подсистему:

$$W^{PT}(x_1, p_1, x_2, p_2) = \frac{1}{\pi^2} \iint dy_1 dy_2 (e^{2i(y_1 p_1 + y_2 p_2)}) \times \sum_j p_j \langle x_1 - y_1 | \rho_1^j | x_1 + y_1 \rangle \otimes \langle x_2 + y_2 | \rho_2^j | x_2 - y_2 \rangle$$

Перепишем  $y_2$ , как  $-y_2'$ , чтобы получить функцию Вигнера с отраженным импульсом:

$$\begin{aligned} W^{PT}(x_1, p_1, x_2, p_2) &= \frac{1}{\pi^2} \iint dy_1 (-dy_2') (e^{2i(y_1 p_1 + y_2 p_2)}) \times \\ &\times \sum_j p_j \langle x_1 - y_1 | \rho_1^j | x_1 + y_1 \rangle \otimes \langle x_2 - y_2' | \rho_2^j | x_2 + y_2' \rangle = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_j p_j \int dy_1 (e^{2i(y_1 p_1)}) \langle x_1 - y_1 | \rho_1^j | x_1 + y_1 \rangle \otimes \\ &\otimes \int (-dy_2') (e^{2i(y_2' (-p_2))}) \langle x_2 - y_2' | \rho_2^j | x_2 + y_2' \rangle = \\ &= W(x_1, p_1, x_2, -p_2) \end{aligned}$$

Согласно соответствию Вейля распределение Вигнера соотносит квантовые операторы с соответствующими переменными в фазовом пространстве. В нашем случае операторы и переменные — квадратуры. Составим следующие векторы:

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{p}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Введем коммутационную матрицу  $\Omega$  для квадратурных операторов, такую что  $[\hat{\xi}_\alpha, \hat{\xi}_\beta] = i\Omega_{\alpha\beta}$ , где  $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ . Она будет иметь следующий вид:

$$\Omega = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операция частичного транспонирования функции Вигнера эквивалентна применению оператора  $\Lambda$  на  $\xi$ , где  $\Lambda = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ .

В квантовой механике любое физическое состояние обязано удовлетворять принципу неопределенности. Верно также и обратное, любое состояние, удовлетворяющее принципу неопределенности является физическим состоянием. Докажем это утверждение.

Может ли удовлетворение принципу неопределенности Гейзенберга являться достаточным условием существования квантового состояния? Этот вопрос эквивалентен вопросу: может ли существовать не положительно определенный эрмитов оператор, удовлетворяющий соотношениям неопределенности. Такого оператора не существует, так как можно посторить такой набор наблюдаемых величин, что для произвольной эрмитовой матрицы соотношения неопределенности нарушаются. Это докажет достаточность удовлетворения принципу неопределенности Гейзенберга для существования квантового состояния. Необходимость очевидна. Следовательно получим критерий существования квантового состояния.

Пусть даны две некоммутирующие наблюдаемые  $A$  и  $B$ .

Принцип неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

Неравенство Шредингера-Робертсона:

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2 + \frac{1}{4} \langle \Delta A \Delta B \rangle_S^2$$

Здесь  $\langle \Delta A \Delta B \rangle_S = \langle \Delta A \Delta B \Delta B \Delta A \rangle$ . Рассмотрим случай эрмитовых матриц  $2 \times 2$ . Общий вид такой матрицы:

$$\rho = \begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix}$$

Матрица представляет собой физическое состояние при выполнении следующих условий:

$$Tr(\rho) = a + b = 1$$

$$Det(\rho) = ab - |c|^2 \geq 0$$

Сразу следует заметить, что при двух отрицательных собственных значениях матрица  $\rho$  не удовлетворяет первому условию, а при одном отрицательном собственном значении она не удовлетворяет второму условию. Предположим, что  $Tr(\rho) = 1$ . Покажем теперь, что второе условие эквивалентно условию Шредингера-Робертсона.

Пусть  $S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$  — оператор углового момента, где  $\sigma_i$  — матрица Паули ( $i = (x, y, z)$ ).

Тогда:

$$(\Delta S_x)^2 (\Delta S_y)^2 = \frac{\hbar^4}{16} (1 - 4c_r^2)(1 - 4c_i^2)$$

$$\langle [S_x, S_y] \rangle = i \frac{\hbar^2}{2} (a - b)$$

$$\langle \Delta S_x (\Delta S_y) \rangle_S = 2\hbar^2 c_r c_i$$

Здесь  $c_r = \text{Re}(c)$ ,  $c_i = \text{Im}(c)$ . Подставив эти выражения в неравенство Шредингера-Робертсона получим  $ab - |c|^2 \geq 0$ .

Таким образом доказано, что для  $2 \times 2$  эрмитовых матриц выполнения неравенства Шредингера-Робертсона достаточно для существования квантового состояния. Соотношение Гейзенберга следует напрямую из соотношения Шредингера-Робертсона, что означает, что если состояние удовлетворяет соотношению Гейзенберга, то оно автоматически удовлетворяет соотношению Шредингера-Робертсона. В общем случае требуется именно удовлетворение состояния соотношению Гейзенберга. И этот критерий верен уже для любых квантовых состояний [12].

Таким образом разница между вторым статистическим моментом и квадратом первого статистического момента определяет, является ли состояние физическим. Таким образом

удовлетворение состоянием принципа неопределенности можно использовать в критерии разделяемости состояния так же, как мы использовали неотрицательную определенность матрицы плотности в критерии для состояний в дискретных переменных. При этом так как перепутанность и смешанность состояния не зависят по отдельности от первого и второго статистических моментов, а лишь от разницы между вторым статистическим моментом и квадратом первого, то первый статистический момент можно приравнять к нулю.

Для определения принципа неопределенности для квадратурных операторов введем матрицу ковариации:

$$V_{\alpha\beta} = \langle \{\Delta\hat{\xi}_\alpha, \Delta\hat{\xi}_\beta\} \rangle = tr(\{\Delta\hat{\xi}_\alpha, \Delta\hat{\xi}_\beta\}\hat{\rho}) = \int d^4\xi \Delta\xi_\alpha \Delta\xi_\beta W(\xi)$$

$$\Delta\hat{\xi}_\alpha = \hat{\xi}_\alpha - \langle \hat{\xi} \rangle$$

$$\Delta\xi_\alpha = \xi_\alpha - \langle \xi \rangle$$

При этом

$$\begin{aligned} \{\Delta\hat{\xi}_\alpha, \Delta\hat{\xi}_\beta\} &= (\Delta\hat{\xi}_\alpha \Delta\hat{\xi}_\beta + \Delta\hat{\xi}_\beta \Delta\hat{\xi}_\alpha)/2 = \\ &= \frac{1}{2} \langle \hat{\xi}_\alpha \hat{\xi}_\beta + \hat{\xi}_\beta \hat{\xi}_\alpha \rangle - \langle \hat{\xi}_\alpha \rangle \langle \hat{\xi}_\beta \rangle. \end{aligned}$$

Это симметрически упорядоченная функция. Стоит отметить наличие равенства между средним, найденным при вычислении следа с матрицей плотности, и средним, найденным через интеграл функции Вигнера. Равенство возникает в следствие соответствия Вейля[18].

В таком случае принцип неопределенности может быть записан в таком виде:

$$V + \frac{i}{2}\Omega \geq 0$$

Любое физическое состояние удовлетворяет этому соотношению. Докажем это:

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta} + \frac{i}{2}\Omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \langle \hat{\xi}_\alpha \hat{\xi}_\beta + \hat{\xi}_\beta \hat{\xi}_\alpha \rangle - \langle \hat{\xi}_\alpha \rangle \langle \hat{\xi}_\beta \rangle + \frac{i}{2}\Omega_{\alpha\beta} = \\ &= \frac{1}{2} \langle 2\hat{\xi}_\alpha \hat{\xi}_\beta - i\Omega_{\alpha\beta} \rangle - \langle \hat{\xi}_\alpha \rangle \langle \hat{\xi}_\beta \rangle + \frac{i}{2}\Omega_{\alpha\beta} = \\ &= \langle \hat{\xi}_\alpha \hat{\xi}_\beta \rangle - \langle \hat{\xi}_\alpha \rangle \langle \hat{\xi}_\beta \rangle = \langle \hat{\xi}_\alpha \hat{\xi}_\beta \rangle \end{aligned}$$

Здесь во второй строке использовано коммутационное соотношение, равенство в третьей строке получается, так как мы принимаем первый статистический момент равным нулю. Следовательно используется только значение второго статистического момента. Выражение эквивалентно такому равенству  $V + \frac{i}{2}\Omega = Tr(\rho\hat{\xi}^2)$ , правая часть которого, вследствие неотрицательной определенности матрицы плотности, должно быть неотрицательным, следовательно должна быть и левая часть. Таким образом утверждение доказано. Более того, так как  $Tr(\Omega) = 0$ , то некоторые собственные значения  $\Omega$  не положительны. То есть тем более  $V \geq 0$ . Это неравенство служит отправной точкой рассматриваемого критерия.

Можно распространить это отношение на другие эрмитовы операторы, зная что квадратуры образуют полный базис в фазовом пространстве, а значит любой эрмитов оператор двухмодового состояния может быть однозначно определен матрицей из четырех вещественных чисел. Например оператор  $\chi(d)$  может быть выражен в виде  $\chi(d) = d^T \hat{x}i = d_1 \hat{x}_1 + d_2 \hat{p}_1 + d_3 \hat{x}_2 + d_4 \hat{p}_2$ , где  $d$  — матрица, содержащая четыре вещественных числа  $d_i, i = 1, 2, 3, 4$ . Соответствующее соотношение неопределенности можно получить тем же методом, что и для  $\xi$ .

Аналогично критерию Переса-Городецкого для систем в дискретных переменных, применение операции частичного транспонирования создает новое неравенство. Как было показано ранее применение операции частичного транспонирования к функции Вигнера равносильно применению оператора  $= \text{diag}(1, 1, 1, -1)$  к  $\xi$ . Изначальное неравенство  $V + \frac{i}{2}\Omega \geq 0$  переходит в новое неравенство:

$$\Lambda V \Lambda + \frac{i}{2}\Omega \geq 0$$

Критерий Переса-Городецкого для состояний с непрерывным базисом состоит в том, что оба неравенства должны выполняться для любого разделяемого состояния.

Две подсистемы двухчастичного состояния часто бывают разнесены в пространстве, и к ним применяются локальные операции по отдельности. Таким образом применимый на практике критерий должен учитывать такой тип операций. Для этого рассматривается ковариационная матрица.

Ковариационная матрица двухмодового состояния — это кососимметричная матрица размера  $4 \times 4$ , симметрия которой описывается симплектической группой  $Sp(4, R)$ . Симплектическая группа — группа операций, сохраняющих кососимметричность матрицы.  $Sp(4, R)$  — симплектическая группа для матриц  $4 \times 4$ , с только вещественными значениями. В нашем случае элементы группы соответствуют любым унитарным операторам, действующим на систему. Вводя условие локальности операций, оператор может быть разделен на два блока, отвечающих каждой из систем. Пусть  $S_{local}$  — элемент группы, тогда он запишется в виде:

$$S_{local} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$$

Здесь  $S_1, S_2$  принадлежат  $Sp(2, R)$ . Ограничение на локальность операций сводит группу  $S(4, R)$ , к ее подгруппе  $Sp(2, R) \otimes Sp(2, R)$ .

Ковариационная матрица для таких операторов будет иметь вид:

$$V = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Здесь  $A, B$  и  $C$  — матрицы  $2 \times 2$ . Описанный выше тип унитарных операторов действует на каждый блок ковариационной матрицы следующим образом:

$$A \rightarrow S_1 A S_1^T \quad B \rightarrow S_2 B S_2^T \quad C \rightarrow S_1 C S_2^T$$

Такая операция должна сохранять  $\det A, \det B, \det C$ , и  $\text{tr} A J C J B J C^T J$ , где  $J$  — ранее приведенная кососимметричная матрица. Теперь можно ввести инвариантную относительно локальных операций форму критерия разделяемости состояний:

$$\det A \det B + \left(\frac{1}{4} - \det C\right)^2 - \text{tr}(A J C J B J C^T J) \geq \frac{1}{4}(\det A + \det B)$$

Эквивалентность двух неравенств, описывающих принцип неопределенности, можно, подставив следующую матрицу в оба неравенства:

$$V_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Любую ковариационную матрицу можно привести к приведенной выше форме при помощи подходящей локальной операции. Таким образом любая ковариационная матрица удовлетворяет неравенству. Окончательно запишем критерий Переса-Городецкого в инвариантной форме, применив оператор  $\Lambda$ . Пусть  $\tilde{V} = \Lambda V \Lambda$ .

Рассматривая каждый блок  $V$  по отдельности видно, что меняется только блок  $C$ , и меняется следующим образом:  $c_2 \rightarrow -c_2$ , при этом  $\det C \rightarrow -\det C$ . След не меняется. Новое выражение для неравенства окончательно запишется в виде:

$$\det A \det B + \left(\frac{1}{4} + \det C\right)^2 - \text{Tr}(AJCJBJC^T J) \geq \frac{1}{4}(\det A + \det B)$$

Переход  $V \rightarrow \tilde{V}$  меняет только знак перед  $\det C$  в неравенстве. Если рассматриваемое состояние — разделяемое, то оно удовлетворяет неравенствам для  $V$  и  $\tilde{V}$ . В этом и заключается инвариантный относительно локальных операций критерий Переса-Городецкого. Удобно записать критерий в виде:

$$\det A \det B + \left(\frac{1}{4} - |\det C|\right)^2 - \text{tr}(AJCJBJC^T J) \geq \frac{1}{4}(\det A + \det B)$$

В общем случае критерий Переса-Городецкого является только необходимым условием разделяемости состояния, но не достаточным. Следовательно он не является необходимым условием перепутанности состояния. Однако в случае гауссовых состояний критерий Переса-Городецкого становится в том числе и достаточным критерием разделяемости. Разделяемость любого гауссова состояния должна определяться только разницей второго статистического момента и квадрата первого. К тому же, как было сказано ранее, первый статистический момент можно приравнять к нулю без потери общности. Значит необходимо знать лишь второй статистический момент. Функция Вигнера для общего случая гауссова состояния будет иметь вид  $W(\xi) = (4\pi^2 \sqrt{\det V})^{-1} \exp(-\frac{1}{2}\xi^T V^{-1}\xi)$ , который определяется только лишь через  $V$ . Гауссово состояние разделяемо, если  $V \geq \frac{1}{2}$ . Остается проверить, что если гауссово состояние удовлетворяет инвариантному критерию Переса-Городецкого, то  $V \geq \frac{1}{2}$ , что подтвердит разделяемость состояния. Для первого неравенства в критерии известно, что оно выполняется для всех физических состояний. Второе же выполняется только для разделяемых. Состояния с  $\det C \geq 0$  автоматически удовлетворяют обоим условиям. Любое физическое состояние имеет вариационную матрицу, приводимую к виду  $V_0$ . Два локальных оператора сжатия, являющихся элементами  $Sp(2, R) \otimes Sp(2, R)$ , могут быть записаны, как  $S_{local1} = \text{diag}(x, x^{-1}, x^{-1}, x)$  и  $S_{local2} = \text{diag}(y, y^{-1}, y^{-1}, y)$ . После применения этих операторов ковариационная матрица примет вид:

$$V'_0 = S_{local1} S_{local2} V_0 S_{local2} S_{local1} = \begin{pmatrix} y^2 x^2 a & 0 & y^2 c_1 & 0 \\ 0 & y^{-2} x^{-2} a & 0 & y^{-2} c_2 \\ y^2 c_1 & 0 & y^2 x^{-2} b & 0 \\ 0 & y^{-2} c_2 & 0 & y^{-2} x^{-2} b \end{pmatrix}$$

Предположим сначала, что  $\det C > 0$ . Возможно выбрать  $x = [(c_1 a + c_2 b)/(c_2 a + c_1 b)]^{1/4}$ . Совершая вращения на одинаковый угол в плоскостях  $x_1 - x_2$  и  $p_1 - p_2$ , ковариационную матрицу можно привести к диагональному виду:  $V''_0 = \text{diag}(k_+, k'_+, k_-, k'_-)$ , где  $k_{\pm} = \frac{1}{2}[y^2 x^2 a + x^{-2} b \pm [(x^2 a - x^{-2} b)^2 + 4c_1^2]^{1/2}]$ , а  $k'_{\pm} = \frac{1}{2}[x^{-2} a + x^2 b \pm [(x^{-2} a - x^2 b)^2 + 4c_2^2]^{1/2}]$ . Неравенство  $V''_0 + \frac{i}{2}\Omega \geq 0$  выполняется для любого физического состояния. Выбрав правильный  $u$  возможно сделать все собственные числа  $V''_0$  больше  $\frac{1}{2}$ . Таким образом  $V''_0 \geq \frac{1}{2}$ , то есть состояния, отвечающие  $V''_0$  разделяемы. Повороты в двух плоскостях на равный угол просто меняют базис, не влияя на неопределенность, значит состояния, отвечающие  $V'_0$  также разделяемые. Наконец, т.к.  $V'_0$

и  $V_0$  связаны через локальные канонические преобразования, то состояния, отвечающие  $V_0$  тоже разделяемы при  $> 0$ .

Для случая  $\det C = 0$  пусть  $c_1 \geq 0$  и  $c_2 \geq 0$ . Можно преобразовать  $V_0$ , используя матрицу  $\text{diag}(\sqrt{2a}, 1/\sqrt{2a}, \sqrt{2b}, 1/\sqrt{2b})$ . В результате получим:

$$V'_0 = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2abc_1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2abc_1 & 0 & 2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Верно неравенство  $V'_0 + \frac{i}{2}\Omega \geq 0$ , что означает, что  $V'_0 \geq \frac{1}{2}$ . Тогда состояние, связанное с этой ковариационной матрицей разделяемо, а значит и изначальное состояние разделяемо.

Доказано, что состояния с  $\det C \geq 0$  разделяемы. Это достаточное условие. Вместе с необходимым условием, выписанным ранее, получаем однозначный критерий перепутанности для гауссовых состояний. При  $\det C \geq 0$  состояния всегда разделяемы, если же  $\det C < 0$ , то возможны два случая: Если состояние нарушает необходимое условие в критерии Переса-Городецкого, то оно перепутано, если же оно удовлетворяет этому условию, то, этому условию удовлетворяет и аналог этого состояния, но с  $\det C > 0$ . Значит такой зеркальный аналог разделяем, а значит и изначальное состояние разделяемо, так как зеркальные отражения состояний разделяемых состояний разделяемы. Такой полный критерий возможен из-за того, что гауссовы состояния можно полностью описать при помощи второго статистического момента.

## 17 Меры перепутанности квантовых состояний в непрерывных переменных

Рассмотрим матрицу плотности для состояния теплового равновесия [13]:

$$\rho = \frac{\exp(-\beta\hat{H})}{\text{tr}[\exp(-\beta\hat{H})]}$$

В собственном базисе оператора  $\hat{n}$  матрица плотности одномодового состояния может быть переписана в виде:

$$\rho = (1 - \exp(-\beta\hbar\omega)) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta\hbar\omega n).$$

Среднее число фотонов считается следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \text{tr}(\rho\hat{n}) = \\ &= (1 - \exp(-\beta\hbar\omega)) \sum_{n=0}^{\infty} (n) \exp(-\beta\hbar\omega n) = \\ &= \rho = (1 - \exp(-\beta\hbar\omega)) \left(-\frac{1}{\hbar\omega} \frac{d}{d\beta}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta\hbar\omega n) = \\ &= [\exp(\beta\omega\hbar) - 1]^{-1} \end{aligned}$$



Таким образом

$$\exp(-\beta\hbar\omega) = \frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle}$$

Теперь мы можем выразить матрицу плотности в терминах среднего значения  $n$ :

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}} |n\rangle\langle n|$$

Рассмотрим ковариационную матрицу двухчастичного гауссова состояния. Теорема Вильямсона утверждает, что любая положительно определенная симметричная матрица может быть диагонализирована при помощи некоторой симплектической матрицы. Значит рассматриваемая ковариационная матрица может быть приведена к виду  $diag(\nu_1, \nu_1, \nu_2, \nu_2)$ . Эти диагональные элементы отвечают  $\hat{x}_1^2, \hat{p}_1^2, \hat{x}_2^2, \hat{p}_2^2$  соответственно. Квадратурные операторы выражаются через операторы рождения и уничтожения, как  $\hat{p}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_i + a_i^\dagger)$  и  $\hat{x}_i = \frac{1}{\sqrt{2i}}(a_i - a_i^\dagger)$ ,  $i=1,2$ . Дисперсии, отвечающие этим операторам в базисе  $n$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \nu_{x_i} = \nu_{p_i} &= \langle n | \frac{1}{2} (a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger) | n \rangle = \\ &= \langle n | \frac{1}{2} (2a_i^\dagger a_i + 1) | n \rangle = \\ &= \langle n \rangle + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Таким образом  $\langle n \rangle_i = \nu_i - \frac{1}{2}$ . Это значит, что любая матрица плотности для двухчастичного гауссова состояния может быть записана в виде тензорного произведения двух матриц плотности одномодовых состояний следующим образом:

$$\rho^{\otimes} = \otimes_i \frac{2}{2\nu_i + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\nu_i - 1)^n}{(2\nu_i + 1)^n} |n\rangle\langle n|$$

Получили матрицу плотности, записанную в терминах дисперсии.

Аналогично случаю для дискретных переменных, энтропия фон Неймана является мерой перепутанности для двухчастичного чистого состояния. Энтропия фон Неймана для подсистемы в терминах дисперсии имеет вид [14]:

$$S_i = \left(\frac{2\nu_i + 1}{2}\right) \log_2\left(\frac{2\nu_i + 1}{2}\right) - \left(\frac{2\nu_i - 1}{2}\right) \log_2\left(\frac{2\nu_i - 1}{2}\right)$$

Здесь  $i=1,2$  - номер подсистемы. Выражение верно, т.к. для чистых состояний  $S_1 = S_2$ . Минимальная энтропия фон Неймана все так же равна 0, и соответствует разделяемому состоянию, а максимальная энтропия фон Неймана, соответствующая максимально перепутанному состоянию равна 1.

Теперь рассмотрим отрицательность, как меру перепутанности квантовых состояний в непрерывных переменных. Идея, как и в случае для дискретных переменных заключается в том, что изначальное состояние подвергается операции частичного транспонирования, а мера отрицательности равна сумме отрицательных собственных значений частично транспонированной матрицы плотности.

Частично транспонированная матрица плотности может быть представлена в виде:

$$\rho^{\otimes PT} = \otimes_i \frac{2}{2\tilde{\nu}_i + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\tilde{\nu}_i - 1)^n}{(2\tilde{\nu}_i + 1)^n} |n\rangle\langle n|.$$

Здесь  $\otimes_i$  — тензорное произведение по индексу  $i$ .

Изначальное определение отрицательности:

$$\varepsilon(\rho) = 2 \sum_i (-\lambda_i^-).$$

Оно эквивалентно следующему определению:

$$\varepsilon(\rho) = \text{Tr}|\tilde{\rho}| - 1$$

Подставим матрицу плотности, выраженную через дисперсии в это уравнение. След будет иметь вид:

$$\text{tr}|\tilde{\rho}| = \frac{2}{2\tilde{\nu}_i + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\tilde{\nu}_i - 1)^n}{(2\tilde{\nu}_i + 1)^n}$$

Для  $\tilde{\nu}_i \geq \frac{1}{2}$  след равен 1. Для  $\tilde{\nu}_i < \frac{1}{2}$  след равен  $\frac{1}{\tilde{\nu}_i}$ . Таким образом отрицательность имеет вид:

$$\varepsilon(\rho) = \max\left[0, \frac{1}{2\nu} - 1\right].$$

Состояние разделяемо при  $\varepsilon(\rho) = 0$

Таким образом введена мера отрицательности. Преимущества этой меры в ее простоте и доступности использования.

## 18 Квантовый дискорд

Смешанное состояние двух подсистем называется классически скоррелированным, если оно может быть записано в виде:

$$\rho_{cc} = \sum_{i,j} p_{i,j} |i\rangle\langle i|^A \otimes |j\rangle\langle j|^B$$

Здесь  $\{|i\rangle^A\}$  — ортогональные состояния в гильбертовом пространстве  $H_A$ , а  $\{|j\rangle^B\}$  — ортогональные состояния в  $H_B$ , вероятности  $p_{i,j}$  все неотрицательны и в сумме дают единицу. Иначе состояние называется квантово скоррелированным. Любое классически скоррелированное состояние разделяемо. Обратное утверждение не верно. Чистое состояние квантово скоррелировано тогда и только тогда, когда оно перепутанно. То есть для чистых состояний квантовая скоррелированность и перепутанность — это одно и то же. Будем рассматривать только смешанные состояния.

Идея данного определения классически скоррелированных состояний происходит из факта, говорящего что такие состояния не искажаются локальными фон Неймановскими измерениями на подпространствах  $A$  и  $B$ . Соответствующие операторы таких измерений:  $E_i^A = |i\rangle\langle i|^A$  и  $E_j^B = |j\rangle\langle j|^B$ . Аналогичным образом можно определить класс состояний, в которых только одно из подпространств не искажается фон Неймановским измерением. В случае, когда не искажается только  $H_A$ , такие состояния будут иметь вид:

$$\rho_{cq} = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|^A \otimes \rho_i^B$$

Такие состояния называются классически-квантовыми. Квантово-классические состояния имеют аналогичный вид, однако там только вторая подсистема  $H_B$  не искажается фон Неймановским измерением.

Квантовая перепутанность — одна из мер квантовых корреляций, однако есть другие методы измерения квантовых корреляций, одна из них — квантовый дискорд [15][16].

Определение квантового дискорда строится на классической теории информации. Общая информация для двух случайных переменных  $X$  и  $Y$  в классическом случае может быть выражена двумя разными способами:

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y),$$

$$J(X : Y) = H(X) - H(X|Y).$$

Здесь  $H(X) = -\sum_x p_x \log_2 p_x$  — классическая энтропия по Шеннону для случайной величины  $X$ , а  $p_x$  — вероятность  $X$  принять значение  $x$ .  $H(X, Y)$  — общая энтропия переменных  $X$  и  $Y$ .  $H(X|Y)$  — энтропия  $X$  при условии  $Y$ , определяется выражением:

$$H(X|Y) = \sum_y p_y H(X|y)$$

Здесь  $p_y$  — вероятность того, что  $Y$  примет значение  $y$ , а  $H(X|y)$  — энтропия  $X$  при условии что  $Y$  принимает значение  $y$ :  $H(X|y) = -\sum_x p_{x|y} \log_2 p_{x|y}$ , где  $p_{x|y}$  — вероятность  $x$  при данном  $y$ .

Равенство  $I$  и  $J$  для классических случайных величин следует из правила Байеса:  $p_{x|y} = p_{xy}/p_y$ , которое можно использовать, чтобы доказать равенство  $H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$ , однако в квантовом случае выражения для  $I$  и  $J$  не равны друг другу. Например для квантового состояния  $\rho^{AB}$  общая информация между  $A$  и  $B$  получается из выражения:

$$I(\rho^{AB}) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB})$$

Здесь  $S$  — энтропия фон Неймана,  $\rho^A$  и  $\rho^B$  — редуцированная матрица плотности.

С другой стороны обобщить  $J(X:Y)$  — несколько более трудная задача. Сначала определим для двухчастичного квантового состояния с матрицей плотности  $\rho^{AB}$  энтропию  $A$  при условии измерения  $B$ :

$$S(A|\{\Pi_i^B\}) = \sum_i p_i S(\rho_i^A).$$

Здесь  $\{\Pi_i^B\}$  — операторы измерений, соответствующие фон Неймановским измерениям подсистемы  $B$ , то есть ортогональные проекторы первого ранга. Вероятность  $p_i$  получения результата  $i$  дается выражением:  $p_i = \text{tr}[\Pi_i^B \rho^{AB}]$ , а соответствующее состояние подсистемы  $A$  после измерения дается выражением:  $\rho_i^A = \text{tr}_B[\Pi_i^B \rho^{AB}]/p_i$ . Величина  $J$  теперь может быть обобщена на квантовые состояния следующим образом:

$$J(\rho^{AB})_{\{\Pi_i^B\}} = S(\rho^A) - S(A|\{\Pi_i^B\}).$$

Здесь индекс  $\{\Pi_i^B\}$  показывает, что величина зависит от выбора операторов измерений  $\Pi_i^B$ . Величина  $J$  представляет собой количество информации, полученное о подсистеме  $A$  при измерении подсистемы  $B$ .

Квантовый дискорд — это минимальная среди всех фон Неймановских измерений разница между двумя различными выражениями для общей информации:

$$\delta^{B|A}(\rho^{AB}) = \min_{\{\Pi_i^B\}} [I(\rho^{AB}) - J(\rho^{AB})_{\{\Pi_i^B\}}].$$

Минимум среди всех фон Неймановских измерений берется, чтобы сделать выражение независимым от выбора измерения. Как величина, квантовый дискорд неотрицателен и равен нулю только для квантово-классических состояний.

В современной литературе используется несколько другое определение квантового дискорда, обладающее схожими с данным определением свойствами, но, вообще говоря, отличающимся от него. Введем меру классических корреляций  $C_B$ , эквивалентную квантовому обобщению  $J$ , взятому максимальным по всем положительным операторо-значным измерениям подсистемы  $B$ :

$$C_B(\rho^{AB}) = \sup_{\{M_i^B\}} J(\rho^{AB})_{\{M_i^B\}}$$

Здесь  $\{M_i^B\}$  — элементы множества положительных операторо-значных измерений подсистемы  $B$ , а  $J(\rho^{AB})_{\{M_i^B\}}$  — обобщение квантового выражения для  $J$  на положительные операторо-значные измерения:

$$J(\rho^{AB})_{\{M_i^B\}} = S(\rho^A) - S(A|\{M_i^B\})$$

Здесь  $S(A|\{M_i^B\}) = \sum_i p_i S(\rho_i^A)$ . Вероятности измерений даются выражением  $p_i = \text{tr}[M_i^B \rho^{AB}]$ , а соответствующие состояния подсистемы  $A$  после измерения даются выражением:  $\rho_i^A = \text{tr}_B[M_i^B \rho^{AB}] / p_i$ .

Квантовый дискорд теперь определится, как разница между общей информацией  $I$  и количеством классических корреляций  $C_B$ :

$$D^{B|A}(\rho^{AB}) = I(\rho^{AB}) - C_B(\rho^{AB})$$

Эта мера отлична от предложенной ранее меры  $\delta^{B|A}$ , однако она также неотрицательна и обращается в ноль тогда и только тогда, когда измеряемое состояние квантово-классическое.

## 19 Вывод

В данной работе были рассмотрены некоторые удобные критерии определения перепутанности квантовых состояний и меры измерения этой перепутанности. Критерий Переса-Городецкого был введен для систем кубитов в дискретных переменных, а затем обобщен на гауссовы состояния в непрерывном базисе. Введены меры перепутанности — "энтропия фон Неймана" и "отрицательность" для дискретных переменных, которые затем опять же были обобщены на случай непрерывных переменных. Было введено понятие квантового дискорда для демонстрации альтернативной меры скоррелированности квантовомеханической системы.

## Список литературы

- [1] М. Нильсен, И. Чанг. Квантовые вычисления и квантовая информация // Мир. - Москва. - 2006.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. Д Лифшиц. Квантовая механика // Наука. - Москва. - 1989.
- [3] T. Deesuan. Entanglement Criteria for Continuous-Variable States // Imperial College London - 2010.
- [4] С. Е. Shannon. A Mathematical Theory of Communication // The Bell System Technical Journal. - vol.27 - 1948.
- [5] J. Von Neumann. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics // Princeton University Press. - New Jersey - 1955.
- [6] Э. Б. Винберг. Курс Алгебры // МЦНМО. - Москва. - 2011.

- [7] N. Higham Functions of Matrices. Theory and Computation // The University of Manchester. - 2006 .
- [8] S. Axler. Linear Algebra done Right // Springer. - 1997.
- [9] A. Peres Separability criterion for density matrices // Physical Review Letters. - 1996.
- [10] R. Simon Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems // Physical Review Letters. - 1999.
- [11] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? // Phys. Rev. — American Physical Society. 1935. — Vol. 47, Iss. 10.
- [12] Hyunchul Nha and M. Suhail Zubairy. Uncertainty inequalities as entanglement criteria for negative partial-transpose states. // 0805.0619, May 2008. Phys. Rev. Lett. 101, 130402 (2008).
- [13] Stephen M. Barnett and Paul M. Radmore. Methods in theoretical quantum optics. // Oxford University Press, January 2003.
- [14] Samuel L Braunstein and Peter van Loock. Quantum information with continuous variables. // quant-ph/0410100, October 2004.
- [15] Alexander Streltsov. Quantum Discord and its role in quantum information theory. // ICFO-The Institute of Photonic Sciences 08860 Castelldefels (Barcelona), Spain.
- [16] Harold Ollivier and Wojciech H. Zurek. Quantum Discord: A measure of quantumness of correlations. // Theoretical Division T-6, MS B288, LANL, Los Alamos, NM 87545.
- [17] Schrödinger E. Discussion of Probability Relations between Separated Systems // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society : журнал. — 1935. — № 31. — С. 555.
- [18] S. Chaturvedi, E. Ercolessi, G. Marmo, G. Morandi, N. Mukunda, and R. Simon. Phase-space descriptions of operators and the Wigner distribution in quantum mechanics i. a Dirac inspired view. // quant-ph/0507053, July 2005.